# M/M/1待ち行列システムの過渡解析

高橋 彰良 (Akira Takahashi)　　高橋 敬隆 (Yoshitaka Takahashi)
早稲田大学　商学部
gotu3hmn@toki.waseda.jp　　yoshitak@waseda.jp

## 1 はじめに

情報通信待時式システム，M/M/1(詳細は章 2 参照) はトラヒック設計・管理・運用の基礎を成している主要なものである．今日の stored-foward 型蓄積網，パケット通信網にも本システムが応用されており，その起源は歴史的に古いのもであるが現代的な応用を持っている．

筆者らは定常解の導出とそのアルゴリズム的解法について既に報告した [1]．本稿ではトラヒック制御 (traffic control) に必要な過渡解析について報告する．確率的な議論と補助的な変数群を用いて直接的に過渡解を示す．その結果，既出文献 [2] に紹介されている解の誤謬を指摘している．

## 2 対象モデル (M/M/1)

本稿では M/M/1 システムを扱う．これは 1 つのサーバと無限の待ち室からなり，そこに到着してくる客 (具体的にはパケット，ATM セル等) の到着分布がポアソン分布に従い，かつサービスに要する時間の分布が指数分布であるようなシステムである．以下，到着率を $\lambda$，サービス率を $\mu$，トラヒック密度を $\rho$ とおく．

## 3 定式化

時刻 $t$ において M/M/1 システム内に存在する客数を $N(t)$ と表すことにする．つまり，

$P(N(t)=r)$
$=$ (時刻 $t$ でシステム内人数が $r$ 人である確率)

とする．時刻 $t=0$ でシステム内人数が $j$ 人であるという条件のもとで，時刻 $t$ にシステム内人数が $r$ 人であるという確率

$$P(N(t)=r|N(0)=j) \equiv P_{j,r}(t)$$

を求める．ここで微小時間 $\Delta t$ を考えて，時刻 0 でシステム内人数 $j$ 人であるという条件のもとで時刻 $t+\Delta t$ に $r$ 人になっているという事象が起るのは，

時刻0 でのシステム内人数が $j$ 人であり，かつ

$(A)$時刻 $t$ でシステム内に $r-1$ 人滞在しており，
微小時間間隔 $(t, t+\Delta t)$ 内で 1 人の到着があり，
かつサービス終了が無い場合

$(B)$時刻 $t$ でシステム内に $r$ 人滞在しており，
微小時間間隔 $(t, t+\Delta t)$ 内で
到着もサービス終了も無い場合

$(C)$時刻 $t$ でシステム内に $r+1$ 人滞在しており，
微小時間間隔 $(t, t+\Delta t)$ 内で到着が無く，
かつ 1 人のサービス終了がある場合

$(D)$時刻 $t$ でシステム内に $r+k$ 人
$(k=-r,-r+1,\cdots,-3,-2,2,3,\cdots)$
滞在しており，微小時間間隔 $(t, t+\Delta t)$ 内で
$k$ 人の到着 ($k \leqq -2$ のとき) または
$k$ 人のサービス終了 ($k \geqq 2$ のとき) がある場合．

の 4 つの場合が考えられる．(A) から (D) の各場合の確率を求めてみよう．

(微小時間間隔 $(t, t+\Delta t)$ 内で

1 人到着がある確率)

$$
\begin{aligned}
&= P(X \leqq \Delta t) \\
&= 1 - e^{-\lambda \Delta t} \\
&= 1 - (1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)) \\
&= \lambda \Delta t + o(\Delta t)
\end{aligned}
$$

ただし, ここで $o(x) \triangleq \lim_{x \to 0} f(x)/x = 0$

(微小時間間隔 $(t, t+\Delta t)$ 内で

1 人も到着しない確率)

$$= 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

(微小時間間隔 $(t, t+\Delta t)$ 内で

1 人サービス終了がある確率)

$$= \mu \Delta t + o(\Delta t)$$

(微小時間間隔 $(t, t+\Delta t)$ 内で

1 人もサービス終了しない確率)

$$= 1 - \mu \Delta t + o(\Delta t)$$

このことから，微小時間間隔 $(t, t+\Delta t)$ 内で 2 人以上の到着やサービス終了，あるいは 1 人到着し且つ 1 人サービス終了といった，２つ以上の変化の起こる確率はともに $o(\Delta t)$ であることが分かる．

M/M/1 システムではシステム内客数，到着時間間隔およびサービス時間間隔はいずれも互いに独立であるから，上の (A)〜(D) が起こる確率は

$$
\begin{aligned}
&P((A) \text{ の場合}) \\
&= P_{j,r-1}(t)(\lambda \Delta t + o(\Delta t))(1 - \mu \Delta t + o(\Delta t))
\end{aligned}
$$

(B)〜(D) も同様にして

$$
\begin{aligned}
&P((B) \text{ の場合}) \\
&= P_{j,r}(t)(1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t))(1 - \mu \Delta t + o(\Delta t)) \\
&P((C) \text{ の場合}) \\
&= P_{j,r+1}(t)(1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t))(\mu \Delta t + o(\Delta t)) \\
&P((D) \text{ の場合}) = o(\Delta t)
\end{aligned}
$$

(A) から (D) の各場合は互いに背反であるから，求める事象の確率は

$$
\begin{aligned}
&P_{j,r}(t+\Delta t) \\
&= P((A) \text{ の場合}) + P((B) \text{ の場合}) \\
&\qquad + P((C) \text{ の場合}) + P((D) \text{ の場合}) \\
&= P_{j,r-1}(t)(\lambda \Delta t + o(\Delta t))(1 - \mu \Delta t + o(\Delta t)) \\
&\quad + P_{j,r}(t)(1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t))(1 - \mu \Delta t + o(\Delta t)) \\
&\quad + P_{j,r+1}(t)(1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t))(\mu \Delta t + o(\Delta t)) \\
&\quad + o(\Delta t) \\
&= P_{j,r-1}(t)(\lambda \Delta t)(1 - \mu \Delta t) \\
&\quad + P_{j,r}(t)(1 - \lambda \Delta t)(1 - \mu \Delta t) \\
&\quad + P_{j,r+1}(t)(1 - \lambda \Delta t)(\mu \Delta t) \\
&\quad + o(\Delta t)
\end{aligned}
$$

これを変形して，$\Delta t \to \infty$ とすると

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} P_{j,r}(t) &= \lambda P_{j,r-1}(t) - (\lambda + \mu) P_{j.r}(t) \\
&\qquad + \mu P_{j,r+1}(t) \qquad (r = 1, 2, 3, \cdots)
\end{aligned}
$$

$r = 0$ の場合は (A) の場合はありえず，また (B) の場合の代わりに

$(B')$時刻 0 でのシステム内人数が $j$ 人であり，かつ

時刻 $t$ でシステム内に $r$ 人滞在しており，

微小時間間隔 $(t, t+\Delta t)$ 内で

到着が無い場合

(客がいないのでサービス終了は考えなくて良い)

となるから

$$\frac{d}{dt} P_{j,0}(t) = -\lambda P_{j.0}(t) + \mu P_{j,1}(t)$$

今，$\rho \triangleq \lambda/\mu \in [0, 1]$ とすると上の 2 式は

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} P_{j,0}(t) &= \mu\{-\rho P_{j.0}(t) + P_{j,1}(t)\} \\
\frac{d}{dt} P_{j,r}(t) &= \mu\{\rho P_{j,r-1}(t) - (1+\rho) P_{j.r}(t) \\
&\qquad + P_{j,r+1}(t)\} \qquad (r = 1, 2, \cdots)
\end{aligned}
$$

さらに，次のように定義すれば

$$P_{j,0} \triangleq \rho P_{j,-1}, \quad P_{j,r} \triangleq 0 \quad (r = -2, -3, \cdots) \tag{1}$$

2 つの式は次のようにまとめられる．

$$\frac{d}{dt}P_{j,r}(t) = \mu\{\rho P_{j,r-1}(t) - (1+\rho)P_{j.r}(t) + P_{j,r+1}(t)\} \quad (r = 0, 1, 2, \cdots)$$

上式の両辺に $z^r$ を掛けて，$r$ について $-\infty$ から $+\infty$ まで加えれば,

$$\frac{\partial}{\partial t}P(z,t) = \mu\left\{-(1+\rho) + \rho z + \frac{1}{z}\right\}P(z,t)$$

$$\text{ここで} \quad P(z,r) \triangleq \sum_{r=-\infty}^{+\infty} P_{j,r}(t)z^r \tag{2}$$

この偏微分方程式の解は次のように表せる．

$$P(z,t) = \Phi(z)exp\left\{-(1+\rho)\mu t + \left(\rho z + \frac{1}{z}\right)\mu t\right\} \tag{3}$$

ただし $exp[x] = e^x$,$\Phi(z)$ は $z$ の適当な関数

## 4. 過渡解の導出

本章では上で求めた式を手がかりに，いくつかの変数を用いて具体的に過渡解を求める．ここで虚数変数のベッセル関数を導入する．これは次のような展開式で与えられる．

$$exp\left\{\frac{1}{2}x\left(z + \frac{1}{z}\right)\right\} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} I_r(t)z^r \tag{4}$$

この式で $z$ を $1/z$ としても左辺は変わらず，右辺は $\sum I_r(t)z^{-r}$ となるので,

$$I_r(t) = I_{-r}(t) \tag{5}$$

が成り立つことを示している．

式 (4) において，$x = 2\mu t\sqrt{\rho}$ および $z = z\sqrt{\rho}$ を代入すると

$$exp\left\{\frac{1}{2}x\left(z + \frac{1}{z}\right)\right\} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} I_r(2\mu t\sqrt{\rho})z^r\rho^{r/2} \tag{4'}$$

式 (4') を式 (3) に代入して

$$P(z,t) = \Phi(z)e^{-(1+\rho)\mu t}\sum_{r=-\infty}^{+\infty} I_r(2\mu t\sqrt{\rho})z^r\rho^{r/2} \tag{3'}$$

もし，$\Phi(z)$ を $\Phi(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\psi_{-n}z^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\psi_n z^{-n}$ に展開したとすると

$$P(z,t) = e^{-(1+\rho)\mu t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\psi_n\frac{1}{z^n}\sum_{r=-\infty}^{+\infty} I_r(2\mu t\sqrt{\rho})z^r\rho^{r/2} \tag{3''}$$

$P(z,t)$ の定義式 (2) より，求める $P_{j,r}(t)$ は式 (3") 右辺の $z^r$ の項の係数を足し合わせたものに等しいことが分かる．したがって,

$$P_{j,r}(t) = e^{-(1+\rho)\mu t}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\psi_n\rho^{(n+r)/2}I_{n+r}(2\mu t\sqrt{\rho}) \tag{6}$$

一方，初期条件

$$P_{j,r}(0) = \begin{cases} 1 & (r = j) \\ 0 & (r \neq j) \end{cases}$$

およびベッセル関数の展開式 (4) から自明な式

$$I_r(0) = \begin{cases} 1 & (r = 0) \\ 0 & (r \neq 0) \end{cases}$$

を式 (6) に代入して

$r = j$ のとき

$$1 = e^0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\psi_n\rho^{(n+j)/2}I_{n+j}(0) = \psi_{-j}$$

$r \neq j$ のとき

$$0 = e^0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\psi_n\rho^{(n+r)/2}I_{n+r}(0) = \psi_{-r}$$

これをまとめれば

$$\psi_{-n} = \begin{cases} 1 & (n = j) \\ 0 & (n \neq j) \end{cases}$$

したがって，式 (6) は次のように書くことができる．

$$P_{j,r}(t) = e^{-(1+\rho)\mu t}\{\rho^{(r-j)/2} I_{r-j}(2\mu t\sqrt(\rho)) + \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n \rho^{(n+r)/2} I_{n+r}(2\mu t\sqrt{\rho}) \quad (6')$$

さらに式 (1) を利用すれば $n \geqq 1$ の場合の $\psi_n$ が求められる．式 (6') で $r=0$ とおくと，ベッセル関数の性質 (式 (5)) より (以下 $I_n(2\mu t\sqrt{\rho})$ を $I_n$ と表記)

$$P_{j,0}(t) = e^{-(1+\rho)\mu t}\{\rho^{-j/2} I_j + \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n \rho^{n/2} I_n\}$$

同様に式 (6) で $r=-1$ とおくと

$$P_{j,-1}(t) = e^{-(1+\rho)\mu t}\{\rho^{-(j+1)/2} I_{j+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n \rho^{(n-1)/2} I_{n-1}\}$$

式 (1) の前者より

$$e^{-(1+\rho)\mu t}\{\rho^{-j/2} I_j + \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n \rho^{n/2} I_n\} = \rho e^{-(1+\rho)\mu t}\{\rho^{-(j+1)/2} I_{j+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n \rho^{(n-1)/2} I_{n-1}\}$$

整理すれば

$$\rho^{-j/2} I_j + \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n I_n = \rho^{-(j-1)/2} I_{j+1} + \rho^{1/2} \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n I_{n-1}$$

ただし　$\phi_n \triangleq \psi_n \rho^{n/2}$

この式で $I_n$ について両辺の係数を比較すると

$$(\text{左辺}) = \phi_1 I_1 + \phi_2 I_2 + \cdots + \phi_{j-1} I_{j-1} + (\rho^{-j/2} + \phi_j) I_j + \phi_{j+1} I_{j+1} + \phi_{j+2} I_{j+2} + \cdots$$

$$(\text{右辺}) = \rho^{1/2}\phi_1 I_0 + \rho^{1/2}\phi_2 I_1 + \rho^{1/2}\phi_3 I_2 + \cdots + \rho^{1/2}\phi_j I_{j-1} + (\rho^{-(-j-1)/2} + \rho^{1/2}\phi_{j+1}) I_j + \rho^{1/2}\phi_{j+2} I_{j+1} + \rho^{1/2}\phi_{j+3} I_{j+2} + \cdots$$

こうして，

$$\phi_n = 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots, j)$$
$$\phi_{j+1} = \rho^{-(j+1)/2}$$
$$\phi_{j+1+k} = \rho^{-(j+1+k)/2}(1-\rho) \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

すなわち，知りたかった $\psi_n (n \geqq 1)$ の値は

$$\psi_n = 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots, j)$$
$$\psi_{j+1} = \rho^{-(j+1)}$$
$$\psi_{j+1+k} = \rho^{-(j+1+k)}(1-\rho) \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

これより，式 (6') は以下のようになる．

$$\begin{aligned} P_{j,r}(t) &= e^{-(1+\rho)\mu t}[\rho^{(r-j)/2} I_{r-j} + \{\sum_{n=1}^{j} + \sum_{n=j+1}^{+\infty}\} \psi_n \rho^{(n+r)/2} I_{n+r}] \\ &= e^{-(1+\rho)\mu t}[\rho^{(r-j)/2} I_{r-j}(2\sqrt{\mu^2\lambda/\mu}t) \\ &\quad + \rho^{-(j+1)}\rho^{(j+1)/2}\rho^{r/2} I_{r+j+1}(2\sqrt{\mu^2\lambda/\mu}t) \\ &\quad + (1-\rho)\sum_{k=1}^{+\infty}\{\rho^{-(j+1+k)}\rho^{(r+j+1+k)/2} \\ &\qquad \times I_{r+j+1+k}(2\sqrt{\mu^2\lambda/\mu}t)\}] \end{aligned}$$

$\sum$ の中の $\rho$ のべきを整理すると

$$\rho^{-(j+1+k)}\rho^{(r+j+1+k)/2} = \rho^r \rho^{-(r+j+1+k)/2}$$

さらに

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-(r+j+1+k)/2} I_{r+j+1+k} = \sum_{k=r+j+2}^{+\infty} \rho^{-k/2} I_k$$

よって，

$$\begin{aligned} P_{j,r}(t) &= e^{-(\lambda+\mu)t}\{\rho^{(r-j)/2} I_{r-j}(2\sqrt{\lambda\mu}t) \\ &\quad + \rho^{(r-j-1)/2} I_{r+j+1}(2\sqrt{\lambda\mu}t) \\ &\quad + (1-\rho)\rho^r \sum_{k=r+j+2}^{+\infty} \rho^{-k/2} I_k(2\sqrt{\lambda\mu}t)\} \end{aligned}$$

これが求める過渡解である．

## 参考文献


[1] 大沢宗一郎，高橋敬隆 「C による情報通信待時式システムの性能評価法」 2002 PC Conference 論文集，pp164-167(2002)

[2] 高橋敬隆，山本尚生，吉野秀明，戸田彰 「分かりやすい待ち行列システムー理論と実践ー」 コロナ社 (2003)

[3] 田坂修二 「情報ネットワークの基礎」 数理工学社 (2003)