

経済動向指数と Markowitz 投資理論の応用

青森公立大学 田中寛
tanaka@nebuta.ac.jp

1 はじめに

日本の経済状態を示す指標としては、内閣府から毎月発表される景気動向指数がある [1]。先行指数、一致指数、遅行指数という三つの指数が、かなり任意の様々な指数から得られている。それぞれの基となる数値はある一定の利用範囲において意味のあるものであろうが、それらが全体としての経済状態を示す指標の数値に利用されてもよいとする根拠は弱い。単に経験的に経済状態を計るために利用しても悪くないであろうと一般的に認められているからであろう。

我々は、経済状況を判断するための数値を得るために、Markowitz 投資理論に依拠する。すなわち、Markowitz 理論を単に投資理論としてみるのではなく、最小リスクを与える期待収益率を経済状態に対する市場が示している見識であるとしようということである。Markowitz 投資理論は [2]、複数の投資対象の時系列のデータから得られる共分散行列だけによって、期待収益率に対するリスクとそのときのそれぞれの投資対象に対する最適の投資比率が得られる。数学的には、次 § に示すように、各投資対象のポートフォリオ投資比率で構成されるベクトルを、先に述べた共分散行列に左右からかけて得られるスカラー量の極値問題である。

市場には、商品市場と金融市場がある。市場規模は、今や金融市場の方が商品市場に比べて圧倒的に大きい。金融市場の中でも証券市場は、元来の市場概念の具現化したものとして重要である。証券市場以外の金融市場に対しては、日本銀行が関与する金融政策がある。しかし、証券市場の動勢には、経済動向が全体として反映されているものと想定する。そこで、証券市場の動勢をとらえるために、Markowitz 投資理論を東京証券取引所の東証 1 部、東証 2 部、ジャスダック店頭市場、東証マザーズという株式市場に参加している 3000 社前後ある全企業に適用することによって、経済状況を判断するとどのような結果になるかを調べる。その結果として、内閣府とはかなり異なった経済状況判断が得られることになる。

§ 2 では、実際の数値計算で用いる Markowitz 投資理論を述べる。§ 3 では、具体的な数値計算の方法を述べる。§ 4 では、数値計算の結果を示すとともに内閣府の指数と比較をした結果について述べる。

2 Markowitz 投資理論

ポートフォリオを組む投資対象が n 個あり、その全ての投資対象のデータとして収益の時間に対する変化が順に M 個あるものとする。その時、各投資対象についての共分散行列を Σ 、ポートフォリオの投資比率のベクトルを \mathbf{w} とすると、

$$\mathbf{w}' \Sigma \mathbf{w} \quad (1)$$

というスカラー量が、期待する収益率 y に対して最小になるように、ベクトル \mathbf{w} を求めれば良いというのが Markowitz [2] が確立した投資理論である。ただし、

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i w_i = y \quad (3)$$

という条件が課される。ここで、 w_i は投資比率ベクトルの各要素であり、 x_i は各投資対象の平均収益率である。Markowitz は、シンプレックス法を用いた独自の方法を用いた解法によって、上記の問題を解いた。しかし、この解き方は、多次元の複雑な問題に適用することは困難である。

同じ問題を行列形式を保ったまま解析的に解くことができる [3]。ある y に対する式 (1) の最小値は、

$$\frac{\gamma y^2 - 2\beta y + \alpha}{\alpha\gamma - \beta^2}$$

であり、その時に得られる w は、

$$\frac{\Sigma^{-1}\{x(\gamma y - \beta) + \mathbf{1}(\alpha - \beta y)\}}{\alpha \gamma - \beta^2}$$

である。つまり、式(1)で与えられるスカラー量は、 y の2次式である。したがって、期待される収益率 y に対する式(1)で与えられる分散の意味があるスカラー量に最小のリスクとなる値

$$\frac{\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{(\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1})} \quad (4)$$

があり、その時の y の値は、

$$\beta/\gamma \quad (5)$$

である。ここで、 $\mathbf{1}$ はすべての要素が1であるベクトルであり、 $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ という量は、それぞれ

$$\alpha = \mathbf{x}'\Sigma^{-1}\mathbf{x}$$

$$\beta = \mathbf{x}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}$$

$$\gamma = \mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}$$

で定義されるスカラー量である。これら全ては、 Σ^{-1} を求められれば計算できる。すなわち、共分散行列 Σ の逆行列 Σ^{-1} を求めることが問題を解くための作業の大きな部分であることが分かる。

今、我々は(5)式で与えられる量を株式市場の経済状況全般に対する見解を集約して示しているものとする。株式市場全体のデータを用いて(5)式を計算すれば、まさに市場全体の意思としてその数値の意味を解釈できることになる。しかも、経済全体の指標が統計学的に求められると共に、(4)式により個々の企業に対する最適の投資比率が得られる。すなわち、投資対象としての個々の企業の格付けができてしまうことになる。(5)式はベクトルであり、その式から得られる個々の企業に対応する値が、プラスの場合はその企業に対する投資を推奨し、マイナスの場合は逆に投資の引き上げが勧められる。これらのことが、共分散行列 Σ の逆行列を求める数値計算処理によって可能となるのである。

3 数値計算の概要

3.1 多倍長精度計算パッケージ

数値計算を行う上での問題は、大行列の逆行列を高い精度で求めることである。通常の数値計算の精度は、C言語の倍精度で最大でも10進数15桁程度である。しかし、今の場合の大行列の大きさが3000前後となるケースでは、全く不十分である。求めた逆行列と元の行列をかけても、その結果は期待される単位行列とはほど遠い結果しか得られない。そこで、多倍長精度の計算ができるライブラリパッケージが必要になる。

従来作成してあるC言語で書かれた数値計算プログラムにとって最も利用しやすいパッケージは、「apfloat」である[4]。「apfloat」にはJava版とC++版があるが、C++版を用いればそのオーバーライド機能によって、元の数値計算プログラムをほとんど変更しなくてもよいことになる。C言語プログラムのほとんどはC++コンパイラでそのままコンパイルできる。今の場合も、配列と変数の型定義だけを変えるだけで、ほぼ済んだ。あと、精度の劣化が演算を行ったときに発生することに対処する必要があった。

「gmp」は[5]、C言語で利用できる多倍長精度パッケージである。C言語の場合、同じ名前の関数の利用が許されないので、関係するすべての演算および変数と配列の型定義を変更しなければならない。この作業の結果をデバッグするのは容易ではなかった。数値計算プログラムでは、ソースプログラムの半数以上の行に影響が及んだ。また、標準の入出力関数の名前さえ変更を余儀なくされた。さらに、計算精度は、「apfloat」のように10進数の桁数で指定することができず、ビット数でしか指定できないことになっている。

3.2 用いた計算機システム

数値計算に用いるハードウェアは、Dell社製ワークステーションである。そのCPUはハイパースレッド対応インテルXeon 2.8GHz 2個であり、記憶領域の容量は1GBである。また、スワップ記憶領域として1GBを設定している。OSとしては、FedoraCore3をインストールしている。これらの結果、CPUはあたかも4個あるように見えることになる。しかしながら、実行プログラムは4個のCPUで分散処理する訳ではない。数値計算プログラムを分散処理させたとしても、オーバーヘッドが大きくなるだけで、処理時間での短縮あるいは記憶容量の節約はあまり期待できない。

3.3 株式市場データ

株式市場のデータは、インターネット上のサイト

[6] から一日一日ごとに csv ファイルとしてダウンロードした。これらのファイルを処理して、一ヶ月ごとのデータについて共分散行列を計算した。その際に、取引がないために株価が一日でもつかなかった企業は、共分散行列の計算からは除外した。月の最初の日に株価がなかった企業については、基準となる株価が存在しないので除外せざるを得ない。また、他の日に取引のなかった企業については、市場という場に参加の寄与の度合いが小さいものと考えて除外した。

4 計算結果と考察

以下に、「apfloat」で 10 進数で 50 桁の精度で計算した計算結果および「gmp」で 192 ビットの精度で計算結果を示し、その考察を行う。

表 1: 「apfloat」と「gmp」の計算時間

計算時間	apfloat	gmp
real	1316m49.789s	362m27.109s
user	1101m27.840s	345m47.970s
sys	5m41.560s	0m28.440s

表 1 に 2004 年 4 月の東京証券取引所一部上場企業のデータについて、「apfloat」と「gmp」とで UNIX の「time」コマンドで計った計算処理時間を示した。ここで、real は実処理時間であり、user はプログラムの CPU 消費時間であり、sys はシステムの CPU 消費時間である。この結果は、同一のデータに対する多倍長精度という内容がほぼ同じ計算をしても、C++ よりも C の方が計算時間が約三分の一であり、C が圧倒的に短いことが分かる。また、システム CPU 時間が C++ よりも C の方が少ないことは、C++ プログラムを実行するために必要な記憶領域の容量が C の場合より多く必要とされるために、実記憶領域と仮想記憶領域とのスワップが頻繁に起きたためと考えられる。ちなみに、UNIX の「top」コマンドで実行中の記憶領域の消費量を計ると、「apfloat」では 1656MB であり、「gmp」では 1115MB である。両方のプログラムとも実記憶領域 (1024MB) だけでは足りないために仮想記憶領域が使われている。なお、実記憶領域の消費量および仮想記憶領域の消費量は、その瞬間瞬間でのシステムの状況によって変化する。また、プログラムを実行する CPU もかなりの頻度で変更され、仮想的に存在する四つの CPU がほとんど平等に使われている。

表 2 に 2004 年度 (2004 年 4 月から 2005 年 3 月)

表 2: 2004 年度の各月毎の企業数および最小リスクの期待収益率

年月	企業数	期待収益率
2004.04	2638	-0.00125
2004.05	2487	-0.01297
2004.06	2460	0.00048
2004.07	2531	0.00168
2004.08	2362	0.00298
2004.09	2480	0.00197
2004.10	2412	0.00693
2004.11	2463	-0.00426
2004.12	2556	0.00061
2005.01	2684	0.00248
2005.02	2741	-0.00423
2005.03	2879	0.00044

について、それぞれの月について、投資対象となる企業数、(5) 式で与えられる最小リスクとなる期待収益率を示す。「apfloat」では 2004 年 2 月と 3 月の計算が途中で停止するために、「gmp」でしか計算結果を得ることができない。このことが起こる原因は、計算に関与する企業数でみると、2700 社を超えているのは 2 月と 3 月だけである。UNIX の「top」コマンドでプログラム実行中のシステム状況みると、記憶領域の消費量が 1800MB を超えていて実記憶と仮想記憶を合計した 2 GB に限りなく近くなっている。そのために、実記憶領域と仮想記憶領域の間でデータをスワップを繰り返しているうちに、何らかのシステムの不具合が起きるものと考えられる。

この表 2 は、最小のリスクとなる期待収益率は、ほぼゼロ前後にしか存在していないことを示す。すなわち、現在の日本経済は、株式投資を行っても 1% 以下の収益率しか見込めないのである。それどころか全体として損失さえ出しかねない現状であることが分かる。まさにこれが市場から直接得られるところの日本経済の現況である。少し細かくみると、8 月にギリシャであったオリンピックを機会に、大画面液晶などのヴィジュアル装置を中心に DVD 録画装置などの需要が喚起され、景気が少し持ち直したことがこの表から読み取ることができる。しかし、それも 10 月まで維持されたにすぎず、11 月以降急速に悪化していることも明らかである。

内閣府が毎月発表している経済動向を示すとしている指標 [1] と表 2 に示した東京証券取引所における株式市場のデータを Markowitz 理論に従って得られた数値との相関係数を表 3 に示す。すべての内閣

[6] <http://www.bekkoame.ne.jp/ha/hahaha/>.

表 3: 内閣府の発表している経済動向指数と Markowitz 理論から得られる数値との相関係数

指数	相関係数
先行指数	-0.127
一致指数	-0.182
遅行指数	-0.167

府の指標との間がマイナスの相関係数となっている。しかも、すべて 0.1 台であり、内閣府の指標と株式市場の経済状況判断とは何の相関がないと結論せざるを得ない。内閣府の三指標は、様々な指標を用いて出されている。そのような指標の中には、先行指数の判定を行うために、東証株価指数（前年同月比）も含まれている。

我々が用いたデータは、東京証券取引所という日本の代表的な証券市場（東証 1 部、東証 2 部、ジャスダック店頭市場、東証マザーズ）で取り扱われている全銘柄を基本的に対象としている。同じく全銘柄を対象とする指数として TOPIX があり、この指数は瞬間的な市場の状況を得るためには便利である。この TOPIX 指数を得ることが可能となったのは、証券市場の IT 化がすすんだ賜物である。しかし、この TOPIX は、証券市場のある瞬間の現況を単に示すものでしかなく、長期的な経済動向を知る目的で用いるためには不向きである。本来市場を観測していて、そこから経済動向を知ることができる量を見つけることができるはずである。我々が今回試みたことは、このことを実践しようというささやかなものである。

謝辞

Markowitz 投資理論について紹介していただいた青森公立大学河野秀孝助教授に感謝する。

参考文献

- [1] <http://www.esri.cao.go.jp/jp/stat/di/di-summary.html>
- [2] H. M. Markowitz: *Journal of Finance* **7**, pp77-99(1952).
- [3] J. H. Cochrane: "Asset Pricing", Princeton University Press, Princeton, PP83-86(2001).
- [4] <http://www.apfcat.org/>.
- [5] <http://www.swox.com/gmp/>.