2005 PC Conference
August5-7,2005 at Niigata University

C 言語による再送トラヒック問題の解析

高橋 彰良 (Akira Takahashi)　　高橋 敬隆 (Yoshitaka Takahashi)
早稲田大学 大学院 商学研究科
akira-takahashi@toki.waseda.jp　　yoshitak@waseda.jp

1 はじめに

サービス・システムが非常に混雑するようになると，多くの客はすぐにサービスを受けることができない．彼らのうちある者はサービスを諦めてシステムを去るかもしれないし，他の者はシステムに滞在して再度サービス要求をするかもしれない．通信系において，このように繰り返されるサービス要求 (再送トラヒック) は再呼と呼ばれ，システムにさらなる負荷をかけることとなり混雑悪化を招くものである．

サービス・システムの性能に関する再呼の重要性は 1940 年後半に指摘され，それ以来，多くの研究がなされてきた [1][2][5][6][7][9]．一度サービス要求を行ってから，再度要求を繰り返すまでの時間間隔を再呼間隔と呼ぶ．この再呼間隔について，多くの文献では指数分布を仮定している．

しかし，指数再呼間隔というこの仮定は，解析を可能にするための一種の簡素化であり，現実のユーザがそのように振る舞うという保証はない．実際のユーザの再呼行動は非常に複雑であり，その再呼間隔が指数分布で近似できないようなとき，システムの性能にどのような影響があるかという問題は重要と考える．

本稿では，再呼間隔分布が指数分布に従う基本モデルを解析し，いくつかの性能評価尺度を導入している．再呼間隔の分布が指数分布以外の分布に従う場合について，C 言語を用いたシミュレーションを作成する．数値例ならびにシミュレーション結果をもとにトラヒック特性について考察している．

2 対象モデル

本稿では以下のような，再呼を含む損失系を扱う．(1) パラレルに配置された c 個のサーバ；(2) 客のサービス時間は互いに独立かつ同一な，パラメータ μ の指数分布に従う；(3) 客の到着は平均 λ のポアソンの過程に従う；(4) ある客が到着した時点で全てのサーバが他の客によって使用中である場合，その客は確率 p で再呼する (＝サービス要求を繰り返す) か，または確率 $(1-p)$ でサービスを受けずにシステムを去る；(5) 再呼をする場合，客は再呼待ち室へ向かい，そこで一定時間 (=再呼間隔) だけ待機した後にサービス要求を行う．；(6) 再呼しない客は即座にシステムから退去する．本稿では次の記法を導入する．定常状態の存在を仮定すれば，システムの状態は (1) 使用中のサーバの数と (2) 再呼するために待ち室で待機している客の数 によって特徴付けられる．使用サーバ数が i 個・再呼待ちの客が j 人の場合，システムは状態 $(i,\ j)$ にあるという． システムに全部で c 個のサーバあれば，システムは状態空間 $\{0,1,\cdots,c\}\times\{0,1,\cdots\}$ のいずれかの状態にある．また，システムが状態 (i,j) にある確率を $\pi_{i,j}$ と表すことにする．

3 指数再呼モデルの数値解

3.1 定常状態確率の計算

微小な時間区間 δt の間に起こりうる状態の変化に注目することによって，表 1 に示されるように状態推移確率を得る．

表 1 より，平衡状態方程式を得ることができる

表 1　状態遷移確率　Stete-transition probabilities

state-transition	probability
$(i+1,j)$ $\uparrow \quad (0 \leqq i \leqq c-1, 0 \leqq j)$ (i,j)	$\lambda\Delta t + o(\Delta t)$
$(i+1,j-1)$ $\nwarrow \quad (0 \leqq i \leqq c-1, 1 \leqq j)$ (i,j)	$j\gamma\Delta t + o(\Delta t)$
(i,j) $\downarrow \quad (1 \leqq i \leqq c, 0 \leqq j)$ $(i-1,j)$	$i\mu\Delta t + o(\Delta t)$
$(c,j) \quad \rightarrow \quad (c,j+1)$ $(0 \leqq j)$	$\lambda p\Delta t + o(\Delta t)$
$(c,j-1) \quad \leftarrow \quad (c,j)$ $(1 \leqq j)$	$j\gamma(1-p)\Delta t$ $+o(\Delta t)$
$(c,j-1) \quad \leftarrow \quad (c,j)$ $(1 \leqq j)$	$j\gamma(1-p)\Delta t$ $+o(\Delta t)$

が，これをそのまま解析するのは非常に困難である．本稿の目的は，再呼間隔分布がシステムに与える影響を考察することであり，誤差を十分に小さくすることができるならば近似的なモデルの解析を進めても差し支えない．対象モデルでは，再呼待ち室，すなわち再呼する客が一時的に待機するための空間，の容量を無限大としていたが，これを有限の k(k は十分大きなの整数) とする．なお，ここでの方法は橋田川島 [9] が類似モデルに用いた手法を応用したものである．これにより，平衡状態方程式は以下のようになる．

for $1 \leqq j \leqq k-1$,

$$(\lambda + j\gamma)\pi_{0,j} = \mu\pi_{1,j}, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}(\lambda + i\mu + j\gamma)\pi_{i,j} &= \lambda\pi_{i-1,j} \\ &\quad + (j+1)\gamma\pi_{i-1,j} + (i+1)\mu\pi_{i+1,j} \\ &\quad (1 \leqq i \leqq c-1),\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}(\lambda p + c\mu + j\gamma(1-p))\pi_{c,j} &= \lambda\pi_{c-1,j} + \gamma\pi_{c-1,j} + \lambda p\pi_{c,j-1} \\ &\quad + (j+1)\gamma(1-p)\pi_{c,j+1}.\end{aligned} \tag{3}$$

For $j = k$,

$$(\lambda + k\gamma)\pi_{0,k} = \mu\pi_{1,k}, \tag{4}$$

$$(\lambda + i\mu + k\gamma)\pi_{i,k} = \lambda\pi_{i-1,k} + (i+1)\mu\pi_{i+1,k} \quad (1 \leqq i \leqq c-1), \tag{5}$$

$$(c\mu + k\gamma(1-p))\pi_{c,k} = \lambda\pi_{c-1,k} + \lambda p\pi_{c,k-1}. \tag{6}$$

この漸化式は，以下のような手順を踏めば解くことができる．

(I) 適当な k を取り，補助変数
$\phi_{i,j} \triangleq \pi_{i,j}/\pi_{0,k}$ を導入する．
(II) 定義により, $\phi_{0,k} = 1$.
(4) より, $\phi_{1,k}$ が定まる．
(5) より, 順次 $\phi_{i,k}(i = 2, 3, \cdots, c)$ を得る．
(III) (1) と (2) で $i = 1, \cdots, c-1$ とすると，
$c+1$ 個の未知変数 $\phi_{0,k}, \phi_{1,k}, \cdots, \phi_{c-1,k}$,
$\phi_{c,k}$ を含む c 個の方程式を得る．
(6) により $\phi_{c,k}$ を得るので,
これらの方程式は解くことができる．
したがって, (3) により $\phi_{c,k-2}$ が定まる．
(IV) $(I), (II), (III)$ を繰り返し行うことで
全ての $\phi_{i,j}$ の値を知ることができる．
正規化条件; $\sum_{i=0}^{c}\sum_{j=0}^{k}\phi_{i,j} = 1/\phi_{0,k}$
によって，$\pi_{0,k}$ が得られ,
$\phi_{i,j} \times \pi_{0,k}$ とすることで，$\pi_{i,j}$ を得る．
(V) k の値を 1 ずつ増やしながら，$\pi_{c,k}$ の値が
10^{-10} 以下になるまで (I) から (IV) の
操作を繰り返す．こうして $\pi_{i,j}$ の値を
十分な精度まで計算することができる．

3.2 性能評価尺度

3.1 で計算した状態確率から，いくつかの性能評価尺度を導入する．

時間輻輳率 B_T

全てのサーバが使用中である確率を時間輻輳率と呼ぶ．B_T は以下の式で与えられる．

$$B_T = \sum_{j=0}^{k} \pi_{c,j}.$$

ブロック率 B

サービスを要求したときに，全てのサーバが使用中であったためにすぐにサービスを受けられなかった場合，客はランダムな時間だけ待って，サービス要求を繰り返すことができる．何度も再呼を繰り返す内に，客の中の何人かはサービスを受けずにシステムから退去してしまうことになる．そこで，到着した客がサービスを受けずに退去してしまう確率としてブロック率 B を定義する．B は，Little の公式により以下のような式で与えられることが示される．

$$B = 1 - \frac{1}{\rho}\overline{C}.$$

ここに，ρ は μ/λ で定義されるトラヒック密度であり，$\overline{C}$ は使用中であるサーバ数の平均である．

平均待ち時間 Wq

システムに到着して，何度か再呼を繰り返し (ただし 1 回も再呼を繰り返さない場合もある) ようやく空きサーバを見つけてサービスを受け始めることができる．あるいは，再呼を繰り返す内にサービスを受けないで退去してしまう．到着した時点から，サービスを受け始めるか，あるいはサービスを受けずにシステムを去る時点までの経過時間の平均が，平均待ち時間 Wq である．B 同様に Little の公式を用いれば，Wq は次のような式で表現することができる．

$$Wq = \frac{\overline{K}}{\lambda}.$$

ここに，$\overline{K}$ は再呼待ち室の平均滞在人数である．

4．シミュレーション

前セクションにおいて，指数再呼間隔の場合のモデルの解析を行い，十分な精度の数値解を導くことができた．しかし，指数分布の再呼間隔のケースでさえかなり複雑であったため，再呼間隔が非指数的な分布を示す場合の解析はいっそう困難である．そこで，本セクションでは，再呼間隔が指数分布以外の分布に従う場合について，シミュレーションによってその評価尺度を求めた．そして，それを指数分布の場合の結果と比較してみることで再呼間隔分布がシステムの性能に及ぼす影響について考察する．

なお，モデルにおいて重要なのは平均到着人数 λ と平均サービス時間 $1/\mu$ の比，あるいは平均再呼間隔 $1/\gamma$ と平均サービス時間 $1/\mu$ の比であることから，パラメータとして λやγ そのものではなく，$\rho = \lambda/\mu$ や $\tau = \mu/\gamma$ を考えることにする．

まずシミュレーションプログラムの精度を確認する．シミュレーションで再呼間隔を指数分布として，その結果を前セクションで求めた数値解と比較する．以下にあげる図 2 は，サーバ数 10・$\tau = 1$・再呼選択確率 (=全サーバ使用中の時に再呼をする確率)$p = 5/6$ のときの ρ とブロック率 B との関係を示したものである．曲線は数値解を，点はシミュレーション結果を表す．両者はほぼ重なっており，シミュレーションの精度が十分なものであることが分かる．B_T，Wq についても同様の結果が得られる．

次に，非指数分布の再呼間隔を持つモデルについてのシミュレーションを行う．具体的には，再呼間隔の分布を (1) 単位分布 (再呼間隔が常に一定)D，(2)2 次元アーラン分布 E_2，(3)2 次元超指数分布 H_2 とした．さらに，超指数分布に関してはその分布の変動係数の 2 乗 ${C_X}^2$ 異なる 3 つのパターンで実験を行った．すなわち，(3-a)${C_X}^2 = 2$ となる場合，(3-b)${C_X}^2 = 20$ となる場合，(3-c)${C_X}^2 = 200$ となる場合，である．以下の 3 つのグラフは，各モデルについて，サーバ数 10・$\tau = 1$・再呼選択確率 $p = 5/6$ というパラメータでシミュレーションを行った結果である．図 2 は性能評価尺度 B と ρ の関係をプロットしたものである．グラフから，いずれのモデルについても殆ど同じ結果が得られていることが見て

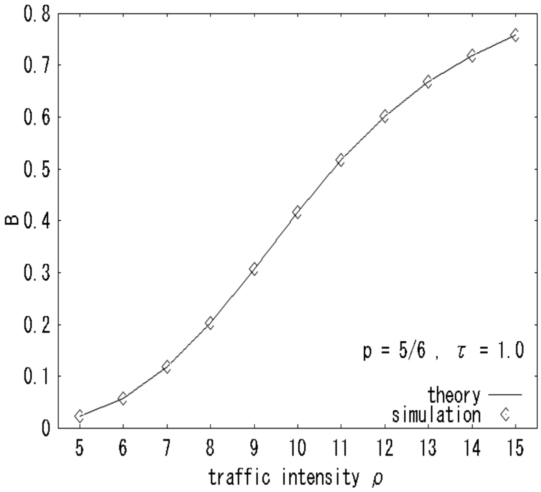

図１ 数値計算とシミュレーションによるブロック率 B

取れる．したがって，少なくともこのようなパラメータの条件であれば再呼間隔分布がどのようなものであっても，指数分布で近似した結果と大きな違いを生じないということが分かる．他の２つの評価尺度に関しても同様の結果が得られる．今後はさらにシミュレーションを繰り返し，このような再呼間隔分布に関する情報がシステム性能に大きく影響しないようなパラメータの範囲を調べていくことが，課題として残されている．

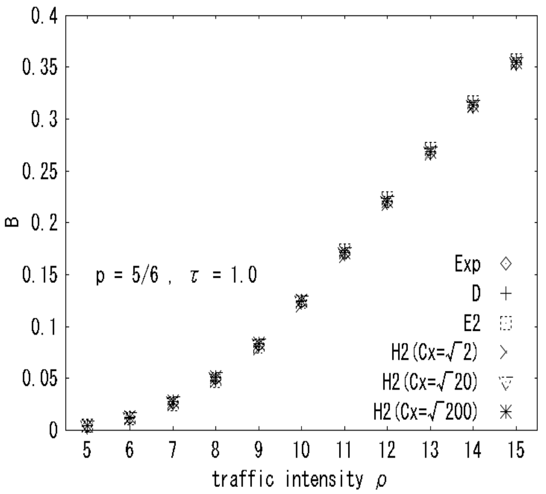

図２ シミュレーションによるブロック率 B の比較

参考文献

[1] Artalejo,J.R., "Accessible Bibliography on Retrial Queues", *Mathematical and Computer Modelling*, vol30, pp1-6(1999)

[2] Keilson,J.,Cozzolino,J,Young,H, "A service system with unfilled requensts repeated", *Operations Research*, l6, 6, pp1126-1137(1968)

[3] 大沢 宗一郎・高橋 敬隆,「C による情報通信待時式システムの性能評価法」*2002 PC Conference* 論文集, CIEC7-I, pp164-167 (2002)

[4] 石川 宏,「C によるシミュレーションプログラミング」（ソフトバンク，1994）

[5] 宇田川　久・三輪 栄一,「ポアソン形の再呼を考慮した即時式完全線群にたいする一考察」電子通信学会論文誌，48，10，pp40-49 (1965)

[6] 大村 弘之・高橋 敬隆,「有限呼源再呼モデルの解析」電子通信学会論文誌 (B), J67-B, No.9, pp937-944 (1984)

[7] 高橋 敬隆,「再呼のある状態依存入力トラヒックモデル：確率解析と情報ネットワークへの応用」 早稲田商学第 402 号 pp101-117 (2004)

[8] 高橋 敬隆・山本 尚生・吉野 秀明・戸田 彰,「分かりやすい待ち行列システム－理論と実践－」（コロナ社，2003）

[9] 橋田 温・川島 幸之助,「再呼のあるバッファメモリのトラヒック特性」 電子通信学会論文誌 (B)，J62-B，No.3，pp222-228 (1979)

[10] 渡辺 達也・高橋 敬隆,「C による情報通信即時式システムの性能評価法」*2002 PC Conference* 論文集，CIEC 7-H， pp160-163 (2002)