Black=Scholes 方程式を用いた金融教育の提案

新井一成*1・高籔学*2・横山監*3・伊藤史彦*4
Email: koffice@u-gakugei.ac.jp

*1: 東京学芸大学
*2: 東京学芸大学
*3: 東京学芸大学大学院
*4: 東京学芸大学大学院

◎Key Words 金融工学，Black=Scholes 方程式，金融教育

1. はじめに

高度に金融化が進み、コンピュータの普及の進んだ現代において、金融工学が盛んになって久しい。金融工学には主として投資理論や資産運用理論が含まれる。中でも H.Marcowitz(1952) の平均・分散理論や、Black=Scholes(1973)(1)のオプション価格理論はそれぞれノーベル経済学賞を受賞しており、特に重要である。

ところが、金融・経済を教える大学教育において、これら諸理論は学生に明解に理解されていないという現状がある。そこで本研究では、やや難しいと思われる Black=Scholes 方程式に着目し、Black=Scholes 方程式の理解を中心に据えた教育内容の提案を行う。それを踏まえ、その提案と金融教育との接点を模索する。

2. Black=Scholes 方程式の概要

2.1 オプション取引の概要

金融工学を利用することができる主な分野は証券取引である。証券取引の主なものとして、原資産(Underlying Security) の取引と派生証券(Derivative Security)の取引が挙げられる。派生証券は実務的には、「そのペイオフ(収益)が何か他の金融証券の価格と明示的に結びついている証券」であるといえる[1]。

派生証券のひとつにオプション取引があげられる。オプション取引とは、金融証券を、将来のある時期にある価格で購入または売却することのできる権利を売買する取引のことである[2]。将来ある価格で証券を購入する権利をコール・オプション、売却する権利をプット・オプションという[3]。以下コール・オプションを購入した場合を例にとって説明する。

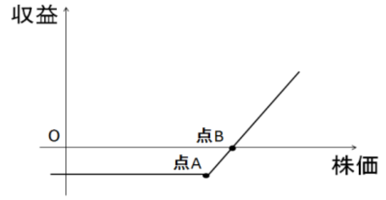

図１　コール・オプション(買い)の損益

オプション取引において売買されるものは証券そのものではなく、ある時期にある価格で証券を購入することのできる権利であるため、当然その権利を購入する金額が決まっている。これをプレミアムといい、単にコール・オプションを購入した場合は証券価格にかかわらずプレミアム分の損失を背負っている。図１のグラフの点 A よりも左側の部分がそれにあたる。点 A より右側では、実際の証券価格が上がるほど収益も上昇し、点 B より右側で利益が発生する[4]。コール・オプションではプレミアム以上に損失を被ることがないため、価格が大きく変動することが予想される際のリスクヘッジの方法のひとつに用いられる。その一方、コール・オプションを売る側のグラフは上下が逆になるため、最大でも利益はプレミアムの価格分のみとなり、証券価格が上昇するほど損失は大きくなる。

以上の検討により、プレミアムの価格は、コール・オプションの購入・売却のインセンティブにかかわる重大な情報であるといえる。このとき、実際の証券価格の変動から、その証券に対する適切なプレミアムの価格を算出する際に用いられるモデルが Black=Scholes 方程式である。

2.2 Black=Scholes 方程式

Black=Scholes 方程式は以下で表される。なお、x は現在の証券価格、K は権利行使価格、c がオプション購入価格(プレミアム)、$\Phi(\cdot)$ は標準正規分布による標準化、をそれぞれあらわす。

コール・オプションにおいて、

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{x}{K}\right) + \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

とすると、オプション購入価格は、

$c = x\Phi(d_1) - e^{-\mu T} \cdot K\Phi(d_2)$ で表される。またプット・オプションにおけるオプション購入価格は、

$p = e^{-\mu T} \cdot K\Phi(-d_2) - x\Phi(-d_1)$ で表される。

コール・オプションとプット・オプション、原資産のそれぞれの売買を組み合わせることで、ある程度のリスクヘッジが可能となる。これをカバード・コールと呼ぶ。

---

1 D.G.Luenberger(1998)(2),邦訳 p.331.
2 この価格を権利行使価格という。
3 従ってオプションは、コール・オプションを購入・売却する場合、プット・オプションを購入・売却する場合の４つのパターンが考えられる。
4 例えば「ある株式を 80 円で購入する権利」を 20 円で購入した場合、株価が 80 円の場合が点 A であり、株価が 100 円の場合が点 B である。株価が 100 円以上であれば、予めプレミアムとして 20 円払っていても、100 円以上の株価を 80 円で購入することができるため利益が発生する。

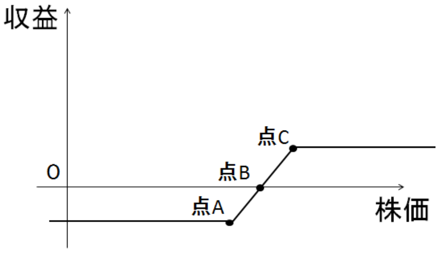

図２　カバード・コールの例

以上が Black=Scholes 方程式の簡略な概要である。次に、Black=Scholes 方程式を理解するためにどのような基礎概念の学習が必要であるか、整理する。

3.　Black=Scholes 方程式の数理的理解に必要な概念

Black=Scholes 方程式の理解には、先述の金融工学的な理解以外に、統計学的な理解と解析学的な理解が必要である。順に検討する。

3.1　正規分布と中心極限定理の関係

Black=Scholes 方程式では、正規分布による標準化が行われている[5]。その理由は、証券価格がある金額であるとき、その金額からある金額だけ上がる確率と下がる確率が等しいとする「株価ランダムウォーク仮説」を前提とするためである。仮にある時点での証券価格の上がる確率と下がる確率が等しい場合、十分な標本数において中心極限定理を用いて以下の性質が知られる。証券価格の確率分布は、期待値を現在の証券価格とする、ある標準偏差をもった正規分布に従う[6]。一般に、確率分布が正規分布となる場合には標準正規分布を用いた計算方法が確立されており、Black=Scholes 方程式においても d_1, d_2 の計算において用いられる[7]。

3.2　離散過程と連続過程の相違

ランダムウォークそれ自体は離散的であり微分不可能であるが、ランダムウォークの時間間隔を十分微小にすることで、それぞれ独立で連続的な過程であるブラウン運動を考えることが可能となる[8]。価格の上下を連続関数として扱うことで、伊藤の補題、ギルサノフの定理など、Black=Scholes 方程式に深いかかわりのある定理の適用が可能となる。

Black=Scholes 方程式を理解する際、以上２点の理解が特に重要となる。ただし後者の、伊藤の補題を中心とする解析学的な理解は数学的にたいへん重要であることに違いないが、偏微分方程式や確率積分など高度な数学的知識を要するため、初学者にとってそこまで重要とはいえない。従って本研究では、相対的に重要となる、統計学的な理解に重点を置いた教育内容を提案する。

4.　教育内容の提案

・対象：経済系の大学生（初学者）

・教育目的：Black=Scholes 方程式を理解するために必要不可欠な基礎概念である、正規分布の標準化ならびに中心極限定理について、数理的側面・視覚的側面の双方から理解する。

・教育内容：中心極限定理は、独立かつ同一分布をもつ確率変数は十分量の標本数のもとで正規分布に従う、とする定理である。中心極限定理は極限・収束の概念が重要だが、経済系の学生は入学段階までに極限や収束に触れる機会が少なく、数式もやや難解であるため直感的な理解がし難い。そこでコンピュータシミュレーションの助けを借りる。授業者が提示するのではなく、学生全員に「R」などフリーの統計処理ソフトウェアをインストールさせ、学生自身がプログラミングできる環境を整える。学生自らがプログラミングすることには複数の利点がある。①自ら記述することで、複雑な数式の成り立ちへの理解が深まる。②ある確率における標準正規分布はいかなる累積確率 $\Phi(\cdot)$ を示すのか、数値を自在に変えて把握することができる。③標本数を増やすほど、証券価格の分布が徐々に正規分布へと近づいていく様子が理解できる。

以上が、Black=Scholes 方程式を本質的に理解するための教育内容の提案である。最後に今回の提案と金融教育との接点について管見を述べたい。

5.　考察：金融教育との接点(おわりに)

大学教育における金融教育において、金融工学の理解は必要不可欠である。Black=Scholes 方程式を用いてプレミアムの計算された派生証券を購入することは、最大損失を確定することになる。そのため、Black=Scholes 方程式はリスクヘッジの観点から語られることが多い。しかし実際に存在する全ての証券がどの時点においてもブラウン運動しているわけではなく、証券価格が権利行使価格 K に達しない場合はプレミアム購入分の損失を自ら被ることとなる。その場合、原証券を保有する、いわゆるリスクテイクの場合よりも収益が少なくなっている。

今回の提案によって学生がモデルへの理解を深めることで、最大損失が確定しているからといって無条件にコール・オプションを信頼したり、また逆に派生証券をよくわからない危険なものとして忌避したりすることなく、時と場合に応じてリスクヘッジ／リスクテイクを選択していく際の意思決定の参考になると思われる。

参考文献

(1)　F.Black &M.Scholes :"The Pricing of options and Corporate Liabilities",*Journal of Political Economy*, Vol.81, pp.637-654, (1973).

(2)　D.G.Luenberger : *Investment Science* , Oxford University , Press, (1998) , 今野浩他訳 ，『金融工学入門』, 日本経済新聞社 , (2002).

(3)　松原望：『入門確率過程』，東京書籍，(2003).

5　一般的に正規分布は $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ の式で記述されることが知られているが、これを標準正規分布 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ の累積密度関数 $\Phi(z)=\int_0^z f(z)dx$ で扱うのが標準化の方法である。

6 これはランダムウォークのマルチンゲール性による。なお より厳密に、Black=Scholes 方程式は、証券価格がある割合だけ増える確率と減る確率が等しいとする、対数正規分布に従うという仮説に基づく。

7 但し実際の証券価格が正規分布に従っているのか、またどの程度の標本数で中心極限定理が適用されたとみるのか等、慎重にならなければならない問題はある。

8 ウィーナー過程(Wiener Process)ともいう。