株価過程に用いられる確率微分方程式の教授方法の検討

森谷康平[*1]・横山監[*2]・高籔学[*3]
Email: n105235@st.u-gakugei.ac.jp

*1: 東京学芸大学
*2: 東京学芸大学大学院
*3: 東京学芸大学

◎Key Words 確率微分方程式，株価過程，シミュレーション

1. はじめに

本研究は、株価過程を説明する確率微分方程式の教授方法を検討するものであり、 学習者が「株価過程を理解し、株価がどのように予測されているのかを理解することで、オプション価格理論のBlack-Scholesモデルを理解する基礎」を獲得すること目指す。

数理ファイナンスの発展は、Black-Scholesのオプション価格理論と、その前提となる株価過程（幾何ブラウン運動）によるところが大きい。そのため、数理ファイナンスの研究を進める上で、Black-Scholesモデルの前提とされる株価過程の理解は不可欠である。しかし、その理解にはマルチンゲール性などの確率過程論における基本的知識から、伊藤の公式をはじめとする確率解析の知識など、様々な知識が必要であり、正確に理解するのは難しい。それにもかかわらず、確率過程や確率微分方程式について解説されている一般的な教科書では、数学的内容が網羅的にまとめられているものが多く、数理ファイナンスにおいて、株価過程に用いられる確率微分方程式の有用性が理解し難い。本研究における教育的意義はここにある。

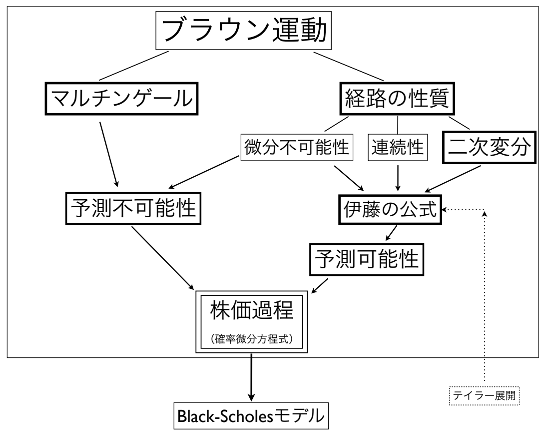
株価過程を理解するには、株価の過程が「時間とともに変化する様子」を理解することから始まる。ここにはブラウン運動の性質が深く関わっている。ブラウン運動は、マルチンゲール性と経路の微分不可能性という２つの予測不可能性を持っている。しかし、そのブラウン運動がたどる経路の二次変分有限という性質によって、確率積分が可能になり、さらに、伊藤の公式によって確率微分方程式に変換することで、株価過程の微分積分が可能になり、株価が予測可能になる。このように理解が進むことによって、「時間が進むにつれて拡散していくものの、ある一定の分散の範囲に収まる株価過程」が理解できる。また、このように株価過程の理解が進めば、オプション価格理論のBlack-Scholesモデルも、微分積分の考えを用いてオプション価格を予測しているため、容易に理解が進むと言える。

そこで本研究は、学習者が「株価過程を理解し、株価がどのように予測されているのかを理解することで、オプション価格理論の Black-Scholes モデルを理解する基礎」を獲得することのできる教授方法を検討する。教育内容には、ブラウン運動のマルチンゲール性と、その経路の性質、伊藤の公式に焦点を当てる。コンピューター利用教育としては、統計処理言語「R」によるシミュレーションを二次変分有限の視覚的、直感的理解のための手段として用いる。教育の対象は、確率過程論の基礎を学習済みの大学生、具体的には、ランダムウォーク、中心極限定理まで理解が進み、これからブラウン運動、伊藤の公式、Black-Scholes モデルと学習していく大学生とする。

本研究の流れとしては、２章において、本研究における株価過程の理解のプロセスを示し、抽出した教育内容について説明を加え、３章ではその教授方法を展開し、４章にて本研究をまとめる。以上が本研究の流れである。

2. 教育内容の構成

2.1. 理解のプロセス



図A　理解のプロセス

図Aは、本研究における「株価過程に用いられる確率微分方程式」の理解のプロセスを図示したものである。

Black-Scholesモデルにおける株価の過程として幾何ブラウン運動が用いられているように、株価過程にはブラウン運動の性質が多く利用されている。株価過程を理解し、株価がどのように予測されているのかを理解するには、マルチンゲール性と経路の微分不可能性からなる①予測不可能性と、二次変分有限や伊藤の公式などからなる②予測可能性、という２つの性質に分けて理解する必要がある。そのため、教育内容として、ブラウン運動のマルチンゲール性と、その経路の性質、そして伊藤の公式に焦点を当てる。なお、図Aに関しては、本研究にお

ける理解のプロセスを視覚的に明示するために図示したものであり、一般的に必要な理解のプロセスではないことに言及しておく。

2.2. 予測不可能性

2.2.1. ブラウン運動の経路の性質

予測不可能性の理解に必要なブラウン運動の経路の性質は、

①ブラウン運動の経路は確率１で連続である。

②ブラウン運動の経路は確率１でいたるところ微分不可能である。

の大きく２つを挙げることができる。

微分積分学の見地からいうと、連続関数であれば微分積分が可能であり、①は次章の「微分積分可能性」の前提部分になる。しかし、注目すべきは②の微分不可能性である。微分可能であるとは、幾何的には関数の微細な変化を、例えば接線の傾きで捉えることであり、これはすなわち変化を予測するということである。つまり、ここでの微分不可能とは予測不可能であることを表す。

2.2.2. ブラウン運動のマルチンゲール性

確率空間$(\Omega,\mathscr{F},\mathrm{P})$で定義されたマルチンゲール$\mathrm{X}(t)$, $t\geq 0$とは、$\mathscr{F}$の部分族である完全加法族$\mathscr{F}_t$の族$\left\{\mathscr{F}_t;t\in\mathbb{R}^+\right\}$が、

$$\mathscr{F}_t\subseteq\mathscr{F}_s\subseteq\mathscr{F}_\infty\quad(0\leq t\leq s)$$

であり、これを情報増大系（フィルトレーション）という。このとき、

（１） $\mathrm{X}(t)$は$\mathscr{F}_t$で可測

（２） $\mathrm{E}(|\mathrm{X}(t)|)<\infty,\forall t\in\mathbb{R}^+$

（３） $\mathrm{E}(\mathrm{X}(t)|\mathscr{F}_t)=\mathrm{X}(s)$

が成り立つ確率過程をマルチンゲールという。

ブラウン運動$\left\{\mathrm{B}(t);t\in\mathbb{R}^+\right\}$が増大情報系であるとき、任意の$t\in\mathbb{R}^+$を所与として

①$\left\{\mathrm{B}(t);t\in\mathbb{R}^+\right\}$

②$\left\{\mathrm{B}(t)^2-t;t\in\mathbb{R}^+\right\}$

③$\left\{e^{u\mathrm{B}(t)+\frac{u^2}{2}t};t\in\mathbb{R}^+\right\},\forall u\in\mathbb{R}$

上記の①～③はマルチンゲールとなる。

2.1.で取り上げたように、株価過程の大きな特徴の１つとして予測不可能性が挙げられる。この株価過程の予測不可能性を理解するにあたり、重要になる部分がマルチンゲールという概念である。端的に言えばマルチンゲールとは予測不可能な確率過程を表すものであり、過去の情報を完全に記憶していても、未来の値を、現時点の値と変わらないというほかには予測できないことを表す。

2.3. 予測可能性

ここでの予測可能とは、微分積分可能であることを指す。以下、その微分積分を可能にする重要な概念について解説する。

2.3.1. 二次変分有限

ここでは標準ブラウン運動を扱う。$\mathrm{B}(t)$の区間$[0,t]$に刻みを入れ、

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t$$

と時間の分点を作り、これを＃とすると、一次変分$\mathrm{V}_\#$は

$$\mathrm{V}_\#=|\mathrm{B}(t_1)-\mathrm{B}(t_0)|+\cdots+|\mathrm{B}(t_n)-\mathrm{B}(t_{n-1})|$$

となる。この一次変分という上昇・下降幅の合計は、分点系＃について有界ではなく、無限に大きくなってしまう。しかし、上昇・下降の変化幅を平方した和である二次変分$\mathrm{Q}_\#$は

$$\mathrm{Q}_\#=|\mathrm{B}(t_1)-\mathrm{B}(t_0)|^2+\cdots+|\mathrm{B}(t_n)-\mathrm{B}(t_{n-1})|^2$$

となり、これは有限なだけでなく、＃を細かくすると一定数tに二次の平均収束をする。これが二次変分有限と呼ばれる性質である。

二次変分有限の理解が重要な理由が主に２つある。１つは確率積分である。平均収束は、ある一定数に収束することを利用して、積分することによく用いられる。つまり、二次変分有限とは、確率積分を可能にする概念で、その意味で重要と言える。もう１つは、伊藤の公式を理解するにあたり、重要な役割を果たす点である。確率積分を微分形にすることに用いられる伊藤の公式にも二次変分有限は深く関わっている。

2.3.2. 伊藤の公式

gの各変数による１階、２階の偏微分

$$\frac{\partial g}{\partial t},\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

が存在し、それらが連続であるという条件のもとで、

$$d\,\mathrm{Y}(s)=\frac{\partial g}{\partial s}(s,\mathrm{X}(s))ds+\frac{\partial g}{\partial x}(s,\mathrm{X}(s))d\,\mathrm{X}(s)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s,\mathrm{X}(s))(d\,\mathrm{X}(s))^2$$

となる。ただし、$(d\,\mathrm{X}(s))^2$のところでルール

$$(ds)^2=0,\quad ds\,d\,\mathrm{W}(s)=0,$$
$$d\,\mathrm{W}(s)ds=0,\quad(d\,\mathrm{W}(s))^2=ds$$

による置き換えをするものとする。なお、この公式は実質的には関数のテイラー展開である。

伊藤の公式とは、微分不可能であったブラウン運動が、二次変分有限によって確率積分可能になり、微分可能な形に変換する際に用いられるものである。理解のポイントについては３章の教授方法にて、詳細に述べるが、株価過程を微分可能な形に変換することによって、株価の予測が可能になるということである。

3. 教授方法の検討

3.1. 株価過程の予測不可能性

株価過程の予測不可能性を教えるにあたって、重要な概念は、ブラウン運動の経路の性質である「微分不可能性」と、ブラウン運動が持つ「マルチンゲール性」の２つである。これらの理解には、便宜上「ミクロ的視点」と「マクロ的視点」の２つの視点で見る必要がある。

ミクロ的視点

ミクロ的視点とは、ブラウン運動がたどる経路の「微分不可能」な性質を持つことを理解することである。微分不可能とは、つまり接線が引けないということである。接線を引くことができるということは、ほぼ完全に次の瞬間の値が予測できることを表すため、ここでいう微分不可能性とは、次の瞬間の値を予測できないことを表す。

マクロ的視点

マクロ的視点とは、ブラウン運動の持つマルチンゲール性を理解することである。マルチンゲールに関する数式的定義は2.2.で説明した。ここでは、教授方法としてその意味について説明する。

マルチンゲール性を理解するのに重要である概念は「増大情報系（フィルトレーション）」である。これは、時間が進むにつれて完全加法族が族として拡大していく性質のことをいう。2.3.1.の二次変分有限の章において記載したが、ブラウン運動の一次変分は収束せず、無限に増大していってしまう。これは「情報増大系」という性質をうまく表しているといえる。

つまり、ここでのブラウン運動におけるマルチンゲール性とは、時間が進むにつれて情報が増大していき、一次で変化分を取っても無限に拡大していってしまうため、過去の情報が完全であっても、未来の値を現時点と変わらないというほかには予測できない確率過程であるということができる。なお、この理解については、次章にてシミュレーションを用いた直感的理解をはかる教授方法と結びつけることができる。

以上の話を整理すると、ミクロ的視点ではブラウン運動の経路の微分不可能性によって、マクロ的視点ではブラウン運動のマルチンゲール性によって、予測が不可能ということである。

3.2. 二次変分有限のシミュレーション

本節では２章において教育内容として紹介された二次変分有限についてのシミュレーションを用いた教授方法を提案する[1]。

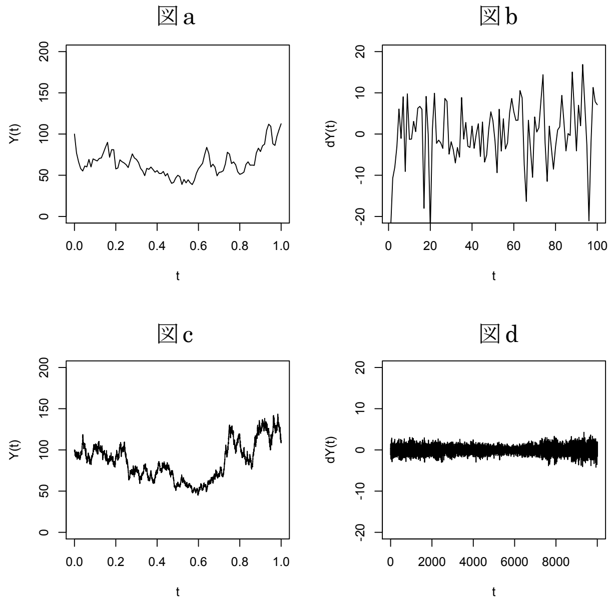
２章において確認したように、$\mathrm{B}(t)$ のある区間$[0,t]$における分点系$\#$が無限大に細かくなるとき、一次変分は無限大に大きくなるが、二次変分は一定数tに収束する。これはつまり、区間$[0,t]$において、ブラウン運動の辿る経路が、一定の分散の範囲内に収まっていることを意味している。このように理解する際に、「一次変分は無限大に大きくなるが、二次変分は一定数tに収束する」ということを直感的にイメージすることが難しい。そこで、幾何ブラウン運動のシミュレーションを利用し、実際の数値とそれを可視化したグラフを提示することで、二次変分が収束することを視覚的に理解させることができる。

シミュレーションによって理解できる点は、次の二つである。

①分点系を細かくするに従って、ブラウン運動の変分の幅が、小さくなっていくこと。

②一次変分と二次変分の振る舞いの違い。

下図a〜dは、区間$[0,t]$を$t=1$として、分点系の細かさを$n=100$から$n=10000$まで増やしたときの幾何ブラウン運動と、その変分のシミュレーション結果の図である。（図aが$n=100$,図cが$n=10000$のとき$\mu=0$, $\sigma=0.1$の幾何ブラウン運動、図b,dがそれぞれの変化分をプロットしたものである。）このシミュレーションより、①を視覚的に理解することができる。



図a〜d　幾何ブラウン運動のシミュレーション

下図e,fは、分点系の細かさを$n=1$から$n=10000$まで1ずつ増やしたときの一次変分と二次変分のシミュレーションの図である。このシミュレーションより、一次変分が増加していくのに対して、二次変分が$t=1$に収束する様子が分かり、②を視覚的に理解することができる。また、一次変分が時間の変化とともに大きくなる様子は、先に示した通り、時間の変化とともに情報が増大していくというマルチンゲール性の「情報増大系」と結びつけて教えることも可能であり、そこにこのシミュレーションの有用性をみることもできる。

確率過程論についての一般的な教科書では、ブラウン運動（および幾何ブラウン運動）のシミュレーション結果（図a,bにあたるもの）を図示しているものが多くみられる。しかし、本節で示した通り、一次変分や二次変分などのイメージしにくいものを可視化することにシミュレーションの意義があると考える。

[1] シミュレーションには統計処理言語「R」を用いた。「R」を用いた理由としては、①オープンソースのソフトウェアであり、教育現場においても容易に利用可能であること、②視覚化に優れたグラフィック機能があること、③数値計算の精度が高く、計算処理速度が速いため、収束などを扱った計算に向いていること、が挙げられる。

図 e

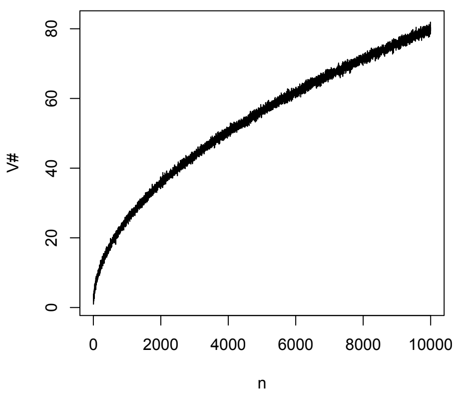
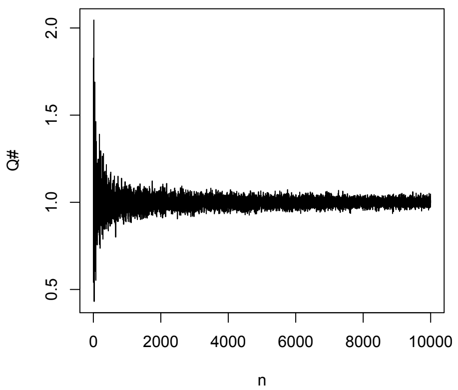


図 f



図e,f　一次変分と二次変分のシミュレーション

3.3.　株価過程の予測可能性

予測可能とは、つまり微分積分可能であることを示す。本節では、3.1.で展開した予測不可能性を持つ株価過程が、どのようにして微分積分可能になったのか、ということを示して，株価の予想可能性を明らかにする。

予測不可能である株価過程から、株価を予測できるようにした大きな要因は２つある。１つは二次変分有限、もう１つは伊藤の公式である。

二次の変分が、ある一定数に収束することは、前章のシミュレーションでも視覚的に明らかになった。これは確率積分に大きな意味をもたらす。図fからわかるように、二次の変分を取ると、n を大きくすればするほど、一次の変分ではランダムであった経路が、ここでは滑らかな曲線に近付いていくことがわかる。

この滑らかな曲線に近付いていく性質を利用して、積分をすることができる。一般的な教科書では、これを確率積分、または伊藤積分と呼ぶ。確率過程論の基礎を学習済みの教育対象を想定しているため、説明は不必要かもしれないが、積分が可能ということは、つまり確率が求まり、そして予測が可能ということである。このように二次変分有限は、その第一歩を示したという点での大きな意義を持つ。

二次変分有限によって確率積分の考え方を用いることができることは理解できたが、この二次変分有限という性質でだけで株価過程の予測が可能になった訳ではない。性質上微分不可能なブラウン運動を、株価過程としての確率微分方程式で表し、予測可能にするには、伊藤過程、そして伊藤の公式が必要である。伊藤過程とは二次変分有限から求まった確率積分を、確定的部分と確率的部分に分け、通常の微分方程式のように扱ったものである。微分方程式のように扱うことで解（ここでは確率過程）が一意に定まる。

伊藤の公式は、伊藤過程の動きをしている確率過程の、関数形の微分方程式を与える公式であり、この変換においても、二次の変分が一定値に収束することを用いて、微分可能にしている。つまり、ここでも二次変分有限の有用性が果たす役割は大きい。なお、ここでテイラー展開を用いる。これは、本研究においては教育内容でないため、ここでは、時間を限りなく細かくしていることを表している、という直感的理解にとどめておく。詳細については各参考書を参照して頂きたい。

この伊藤の公式によって変換された確率微分方程式は、株価過程のランダムな変化のうちの局所的な変化の法則を表し、この確率微分方程式を解くことによって、特定の株価過程の全体を表す解が求まる。Black-Scholesモデルの前提の株価過程に用いられる幾何ブラウン運動は、実はこのようにして求められるのである。

このように伊藤の公式を理解するにも、二次変分有限という性質の理解が大部分を占める。伊藤の公式が二次変分有限を用いて、微分可能な形に変換する意義は、二次変分有限のシミュレーション図から理解できる。図fの $t=1$ への収束する速度は、もとになっているブラウン運動の性質に対応している。つまり、ブラウン運動の分散が大きいと二次変分有限の収束に時間がかかり、小さいと収束にあまり時間を要さない。このことは株価の予測精度についての直感的解釈につながっている。すなわち、分散の大きなブラウン運動は、二次変分有限の収束に時間がかかり、予測精度が落ちるが、分散の小さなブラウン運動は、収束にあまり時間がかからないため、予測精度が上がる。

以上のような流れが、予測不可能性を持った株価過程を予測可能なものにしている。

4.　おわりに

本研究では、株価過程の「予測可能性」と「予測不可能性」の２つの性質を理解させる教授方法を明らかにした。これは Black-Scholes モデルの理解につながるものである。課題としては「予測不可能性」、特にマルチンゲール性の具体的な教授方法を明示できなかった点が挙げられる。発表当日は、二次変分有限のシミュレーションについてのより詳細な説明を付け加える。

主要参考文献

(1)　岩城秀樹：“確率解析とファイナンス”，pp.117-144(第5章)，共立出版（2008）．

(2)　小林道正：“ファイナンス数学基礎講座6 ブラック・ショールズと確率微分方程式―ファイナンシャル微分積分入門―”，朝倉出版（2003）．

(3)　松原望：“入門確率過程”,pp.171-215(第8章,第9章)，東京書籍（2003）