Black=Scholes モデルの教育内容の検討

北嶋華奈[*1]・伊藤史彦[*2]・新井一成[*3]・高 籔 学[*4]
Email: a090118f@st.u-gakugei.ac.jp

*1: 東京学芸大学教育学部初等教育教員養課程社会選修
*2: 東京学芸大学院
*3: 東 京 学 芸 大 学 個 人 研 究 員
*4: 東 京 学 芸 大 学

◎Key Words Black=Scholes モデル, 確率過程, 教育内容

1. はじめに

本研究は、数学や金融の専門知識を習得していない段階にある大学生・社会人を対象とし、金融工学の中でも特に Black=Scholes 方程式（以下、BS 方程式）に着目し、理論の理解に必要な数学的知識や理論の関連の教授を重視した教育内容の検討を行うものである。

日本の戦後経済は、固定相場制から変動相場制への移行、市場開放および貿易の自由化を経て自由競争市場を前提とした経済取引といった形で実現されてきた。この自由競争市場を前提とした取引は市場参加者に新たなリスク、「価格変動リスク」をもたらし、これこそがデリバティブ市場が大きな成長を遂げてきた背景であると考えられる[1]。なぜならデリバティブは、実際の市場が完備市場でないことを前提として[2]、リスクコントロールや特殊なキャッシュフローパターーンの作成に関して、そこで処理できない需要に対応することを目的としているからである。そして FTA(Free Trade Argument)や TPP(Trance-Pacific Partnership)がさかんに叫ばれ[34]、世界一体での自由競争市場が形成されようとしている現代において、デリバティブの重要性はより高まってくる。だからこそ金融・経済を学ぶ大学生や自己資産を運用し始める社会人にとって、デリバティブを理解することは、重要であると考えられる。

デリバティブには金融工学が利用されている。「金融工学を学ぶことによって、市場全体がどのような不確実性を持っており、その不確実性が各証券やデリバティブにどの程度影響を与えているかなどが、数学モデルのイメージを通じ理解しやすくなるはず」であるという観点からも[5]、大学生・社会人にとって金融工学を通じてデリバティブを学ぶことは重要である。その中でもデリバティブを対象とした Black=Scholes (1973) のオプション価格理論は金融工学における基礎的理論を広く扱っており、この理論を理解することはデリバティブのみならず、金融工学を理解するにあたり必要である。しかし、Black=Scholes(1973)のオプション価格理論は、高度な確率や統計に対する知識が必要であり、尚且つそれらの知識が相互に関連し合っているがゆえに、大学生・社会人に明快に理解されていない。既存の教科書や教授方法の研究も難解さを改善できていないものや、部分的な理解のみを促すものが多く、問題点は解決されていない。そこで本研究は特に BS 方程式に着目し、既存の教授法の課題を整理し、その後理論の理解に必要な数学的知識や理論の関連の教授を重視した教育内容の提案をする。

2. BS 方程式の概要

2.1 デリバティブとは

金融工学を利用することができる分野は、証券取引である。証券取引の主な対象として、原資産（underlying assets/underlying products）の取引と、金融派生商品（financial derivative products）の取引がある。金融派生商品とは、基礎となる他の数値によって価格が決まる有価証券のことであり、デリバティブは、後者の金融派生商品に該当する。

金融派生商品の取引は主に、先物取引、スワップ取引[6]、オプション取引の３つに分類される。本研究では、BS 方程式の主な対象であるオプション取引に着目する。

オプションには２つの基本形がある。１つはコール・オプションであり、この保有者はある特定の日に、ある特定の価格で、ある資産を購入する権利をもつ。もう１つはプット・オプションで、保有者がある特定の日に、ある特定の価格で、ある資産を売却する権利をもつというものである[7]。オプション取引は、この権

[1]派生商品といわれ、株や債券などの原資産から派生した商品（デリバティブ）を扱う市場のこと。

[2]起こりうるすべての状況について条件付請求権が設定され、それぞれの市場で取引されれば、競争的な市場メカニズムはパレート最適な資源配分を保証することが証明されている。このようにすべての状況に対応した条件付請求権が用意されている市場のこと。(引用：参考文献 (5) ,100 頁)

[3]FTA の基本的な構成要素である物品市場アクセス（物品の関税の撤廃・削減）やサービス貿易のみではなく、非関税分野（投資、競争、知的財産、政府調達等）のルール作りのほか、新しい分野（環境、労働、「分野横断的事項」等）を含む包括的協定として交渉されている協定。

[4] FTA は、Free Trade Agreement の略称で、「自由貿易協定」と呼ばれます。国や地域同士で「輸出入にかかる関税」や「サービス業を行う際の規制」をなくすための国際的な協定。

[5] 引用：参考文献 (6) ,12 頁

[6] 先物取引とは将来の売買についてあらかじめ現時点で約束をする取引のこと。現時点では売買の価格や数量などを約束しておき、将来の約束の日が来た時点で、売買を行う。スワップとは、元来、等価値のものの「交換」という意味。デリバティブのスワップ取引において交換するのは、将来にわたって発生する利息。同じ通貨で異なるタイプの利息を交換するのが金利スワップ。（出典：金融広報中央委員会「知るぽると」）

[7] オプションには、アメリカン・タイプとヨーロピアン・タイプの２つがある。アメリカン・オプションは、満期までのいつでも行使することができるオプション、ヨーロピアン・オプションは満期その日だけ

利を取引の対象としている。契約で特定された日付は満期あるいは行使日（expiration date, exercise date, strike date）と呼ばれ、また、契約で特定された価格のことを行使価格あるいは権利行使価格（exercise price, strike price）と呼ぶ。以下、コール・オプションを購入した場合を例にとって説明する。

オプション取引において、売買されるものは証券そのものではなく、ある時点にある価格で証券を購入することのできる権利であるため、その権利を得るための金額が決まっている。これをプレミアム（あるいはオプション価格）といい、単にコール・オプションを購入した場合は原証券価格に関わらずオプション価格分の損失を負っている。図１のグラフの点Ｂより右側では利益が発生する。コール・オプションはオプション価格以上に損失を被ることがないため、価格が大きく変動することが予想される際のリスクヘッジの方法のひとつに用いられる[8]。

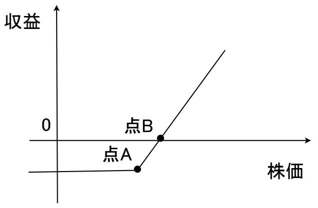

図１　コール・オプション(買い)の損益

以上の検討によりオプション価格は、コール・オプションの購入・売却のインセンティブに関わる重要な情報であるといえる。このオプション価格の計算をするのに用いられるのがBS方程式である。

2.2 BS方程式とは

BS 方程式は以下で表される。$C(0,\omega)$がオプション購入価格（プレミアム）、Sは現在の原証券価格、Kは権利行使価格、Tは満期、$\Phi^c(z)$は標準正規分布の補分布関数をそれぞれ表す。

$$C(0,\omega) = S\Phi^c\left(d-\sigma\sqrt{T}\right) - \frac{K}{e^{rT}}\Phi^c(d)$$

$$d = \frac{\log\frac{K}{S} - \left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$\Phi^c(z) = \int_z^\infty \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \Phi(-z)$$

また分布関数$\Phi^c(z)=\Phi(-z)$の関係を利用し、$d_1=-d+\sigma\sqrt{T}, d_2=-d$とすると以下のように表せる。

$$C(0,\omega) = S\Phi(d_1) - \frac{K}{e^{rT}}\Phi^c(d_2)$$

つまり、この式は権利行使日のスポット価格と権利行使価格の差額がオプション価格であることを示している[9]。そしてこのオプション価格を知るには、スポット価格が権利行使価格を上回る確率がどれだけあるかを知る必要がある。

プット・オプションによるオプション購入価格は以下のように表せる。

$$P(0,\omega) = \frac{K}{e^{rT}}\Phi(d) - S\Phi\left(d-\sigma\sqrt{T}\right)$$
$$= \frac{K}{e^{rT}}\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1)$$

３．教育内容の提案

3.1　教科書・テキスト分析の視点

本研究ではBlack=Scholesモデルの根幹をなすBS方程式に着目し、既存の教育内容の問題点を整理することで、新たな教育内容の提案を目指す。BS 方程式を扱っている既存の４つの著書を利用し[10]、①数学的理解・理論へのアプローチの度合、②数式の操作の有無、③統計的概念の獲得の有無、④公理・理論とモデルの関係性の明確さ、という４つの観点から評価をした。さらに、これらの著書の取り扱っている項目と項目数についても比較した。これにより、既存の教授法における難解さを改善できていない点（a)、部分的な理解のみを促すという点(b)の２つの課題の一般化を試みた。

課題(a)の原因は２点ある。１点目は、BS方程式を支える数学的・統計的知識の網羅的な扱いをしていること（a-1）である。それゆえ、理論がどう BS 方程式に関連しているかどうかという関係性が学習の過程で埋没しており、難解さの原因になっている。この難解さに対する改善の提案に関しては、3.2で述べる。２点目の原因は、数学の高度な知識の要求(a-2)である。これにより、BS 方程式を理解するまでに金融へのアプローチが欠如し、「数学のテキスト」へと化してしまっている。この課題に対する提案は、3.3で述べる。

課題(b)の原因は、網羅的な扱いと対照的に必要な数学的・統計的知識の省略である。具体的には、BS 方程式そのものの理解には至らず、単にBS方程式に数値をいれ値を算出するだけで、BS 方程式を理解したとしている。それゆえ、市場の不確実性を理解するのに必要な基礎的部分が欠如している。以上の内容を図２に体系化した。

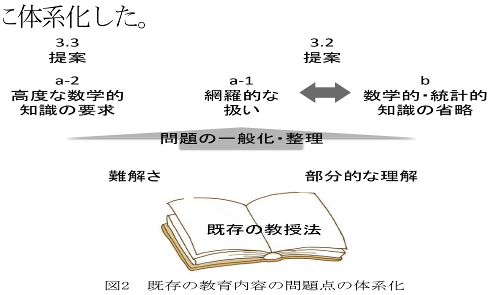

図2　既存の教育内容の問題点の体系化

に行使することができるオプションである。本研究では、BS 方程式によるプライシングの対象であるヨーロピアン・オプションを対象とした取引のことをオプション取引とする。

[8] 例えば「ある株式を80円で購入する権利」を20円のプレミアムで購入した場合、株価が80円の場合が点Aであり、株価が100円に場合が点Bである。株価が100円以上であれば、予めプレミアムとして20円払っていても、100円以上の株価を80円で購入できるため利益が発生する。（この場合における80円は権利行使価格という。）またプット・オプションでは売る側のグラフは上下が逆になるため、証券価格が上昇する程損失が大きくなる。

[9]オプションの権利行使日の市場価格のこと。

[10] 参考文献、(3),(4),(8),(9)に該当。これらの著書は、以下の３つの観点から採用した。〈1〉初学者を対象としているか、〈2〉数学的基礎が教示してあるか、〈3〉ファイナンスへの応用がされているか。

3.2 BS 方程式の数理的理解に必要な概念

前節で考察したように、BS 方程式の理解には、数学的・統計的知識の網羅的な扱い（a-1）と、それとは対象的に必要な数学的・統計的知識を省略している(b)という２つの課題がある。本節では、これらを踏まえて何を教授すべきか、ということを順に検討する。以下に教授すべき項目を図にした（図3）。

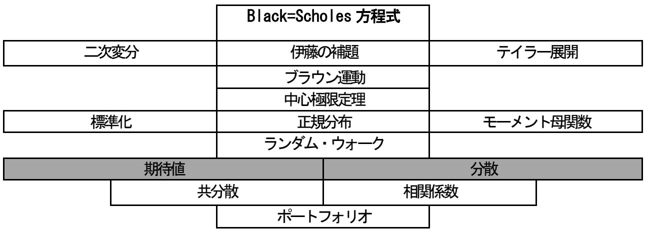

図3　教授すべき項目

上記の図 3 は、BS 方程式を明快に理解するにあたり必要であると考えた項目である。BS 方程式は元より金融工学は「期待値・分散」を基礎として成り立っている[11]。その理由は、金融工学は金融という社会的現象を工学という自然科学の方法で定量的に理解することが最大のメリットであり、定量的に扱う際に「期待値・分散」が利用されるからである。それゆえこの「期待値・分散」を最初に理解することは、最も重要である。

そして金融工学では、特定の事象の発生頻度が、正規分布に従うことを前提としている[12]。この前提は中心極限定理によって証明されるのだが[13]、収束の概念がない初学者にはまず、正規分布とは何かという概念の獲得が先行したほうが理解しやすい。

BS 方程式では、正規分布による標準化が行われている[14]。その理由は、証券価格がある金額であるとき、その金額からある金額だけ上がる確率と下がる確率が等しいとする「株価ランダム・ウォーク説」を前提とするためである。それゆえこのランダム・ウォークを[15]、正規分布より前に学習することが必要である。

さらにある時点での証券価格の上がる確率と下がる確率が等しい場合、十分な標本数において、証券価格の確率分布は、期待値を現在の証券価格とする、あらゆる標準偏差をもった正規分布に従うという中心極限定理を用いた性質が知られている。初学者にとって馴染みのない収束の概念である中心極限定理の理解には、モーメント母関数を用いた中心極限定理の証明とコンピュータによるシミュレーションの二本立ての理解が有効である[16]。

ランダム・ウォークはそれ自体、離散的時系列であり、微分不可能である。しかしランダム・ウォークの時間間隔を無限に細かくして表したブラウン運動では[17]、微分が可能になる。BS 方程式を導くのに必要な、伊藤の補題[18]や確率微分方程式はこのブラウン運動をもとにして作られたものであり、ブラウン運動を理解することは重要である。

BS 方程式では、原証券である株価の変動モデルとして一般化したウィーナー過程を仮定し、その後この伊藤の補題を利用して、原証券の変動とオプションの変動を表す関数を作っており、BS 方程式には大変重要な概念である。しかし、この伊藤の補題の理解には二次変分やテイラー展開など高度な数学的知識が要求される。それゆえ初学者には、直感的理解が有効であると考えられる。

最後に図 3 の、「期待値・分散」の下部について説明する。この部分は直接的に BS 方程式に関係する項目ではないが、「期待値・分散」の概念の獲得に大変有効であるため盛り込んだ。初学者自らにポートフォリオを作成させ[19]、グラフにアウトプットすることで(a-2)の市場への応用を体験させるねらいもある。

3.3　教育方法について

本節では、まず課題(a-2)へのアプローチをする。その後、既存の教授プロセスの問題点を整理し、その課題に対応した新たなカリキュラムの提案をする。

課題(a-2)については先に述べたように、市場への応用を重視しした教授法が必要であり、その際に PC を用いたシミュレーションが有効であると考えられる。そのため本節では、シミュレーションに有効な中心極限定理とポートフォリオ理論に重点をおいて述べる。金融工学の基礎となる「期待値・分散」の理解には、先に述べたようにポートフォリオ理論を応用したシミュレーションが有効であると考えられる。授業者が提示

---

[11] 期待値とは、“確率変数の値×その確率 $f(x)$”の和をと $\mathrm{E}(X)$ 記し、X の確率論的期待値といい次の式で表す。$\mathrm{E}(X)=\sum_x xf(x)$ また、分散とは確率変数 X のつきの指標尺度であり、次の式で表す。$V(X)=\mathrm{E}((X-\mu)^2),\mu=\mathrm{E}(X)$ ちなみに、$D(X)=\sqrt{V(X)}$ のことを確率変数 X の標準偏差という。

[12] 正規分布とは、次の式で表される分布のことである。$N(\mu,\sigma^2)=f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ また、$\mu=0,\sigma^2=1$ のときの正規分布を標準正規分布と呼ぶ。

[13] 中心極限定理とは、独立で同一分布をもつ $X_1,X_2,\cdots,X_n$ に対し、n が大ならば、もとの確率分布がなんであっても、$S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$ は $N(n\mu,n\sigma^2)$、$\bar{X}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ は $N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$ に従うという定理である。

[14] 標準化とは、平均が 0、標準偏差が 1 になるように変換すること。標準化を行うと基準（平均値と標準偏差）が統一されるため、値を相互に比較することができるようになる。この標準化は、複数の項目を一度に解析にかける多変量解析において非常によく利用される。

[15] ランダム・ウォークとは、一定時間ごとに起きる確率的な変化を足し合わせた量。一般のランダム・ウォークで、ある時点での変化分は独立だが、同じ確率変数であると定義される。

[16] モーメント母関数とは、確率変数 x と変数 θ に関して、次のように表される。$M(\theta)=\mathrm{E}\left[e^{\theta x}\right],K(\theta)=\log M(\theta)$ 確率変数が離散型の場合 $M(\theta)=\sum_x e^{\theta x}p(x)$、確率変数が連続型の場合 $M(\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\theta x}p(x)$、確率密度関数の計算が困難な場合に、このモーメント母関数を利用すると処理が簡単になることがある。

[17] ブラウン運動とは、ウィーナー過程とも呼ばれ、連続時間に関して定められる確率変数だが, 連続的に生じるランダム・ウォークと理解してもよい。

[18] 伊藤の補題（レンマ）は、正規分布 N(0, t)に従うブラウン運動を持つ確率過程 S_t による関数 $F(t,S_t)$ の微小変化 dF が、次のように表せる。

$$dF=\frac{\delta F}{\delta t}dt+\frac{\delta F}{\delta S_t}dS_t+\frac{1}{2}\frac{\delta^2 F}{\delta S_t^2}dS_t^2$$

[19] Markwitz のポートフォリオ理論を指す。分散投資の考え方を、統計手法に基づき投資理論として体系化したもの。証券の個別銘柄のリターンとリスクは、リターンの平均値やその標準偏差といっ

するのではなく、フリーソフト「R」などを利用し、学習者自らにプログラミングをさせる環境を整える。また中心極限定理においてもこの手だては有効であると考えられる。中心極限定理には、極限・収束の概念が重要だが、初学者には馴染みのない概念であり、数式による操作のみでは理解が難しい。それゆえシミュレーションによる直感的理解から、数学的理解へのプロセスが有効であると考えられる。

正規分布の理解においては「表計算ソフト」を利用し、標準正規分布表を作成することで、正規分布の性質、特に平均と標準偏差さえ判明すれば累積確率が求められることの有効性を理解させられる利点が生まれる。

以上のように一概にひとつのアプリケーション・ソフトウェアに頼るのではなく、直感的理解、ならびに数式の成り立ちに対する理解を促したい場合にはプログラミング・シミュレーションに適したアプリケーションを用い、正規分布のようにその性質を理解させたい場合には、実際に正規分布の示すものを初学者が読み取れるアプリケーションを利用することが有効である。

次にこれらの内容を踏まえ、既存の教授におけるプロセスの問題点について整理し、新たなカリキュラムの提案をする。既存の教授プロセスは、大きく分けて２つ（(i),(ii)）ある（図4)。

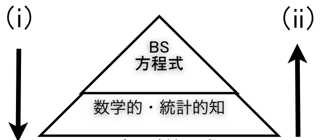

図4 既存の教授プロセス

(i)BS 方程式の概要→数学的・統計的知識の教授、(ii)数学的・統計的知識の教授→BS 方程式の算出、である。(i)は、BS 方程式の概要が導入として扱われるため、初学者にとって金融工学に対する興味が湧きやすい構成となっている。しかし、その一方で「なぜBS 方程式が重要であるのか」という視点、並びにBS 方程式の理解における理論の連鎖が希薄化してしまっている。(ii)では、BS 方程式は数学的・統計的知識の応用として扱われており、3.1 で述べた課題(a-1)を払拭することはできない。これらの課題を踏まえ、BS 方程式を理解するための新たなカリキュラムについて述べる。以下にカリキュラムのフローを図示した（図5)。

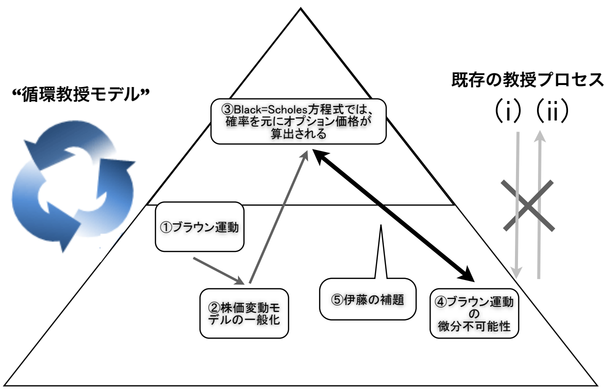

図5 “循環教授モデル”

図5は、“知識獲得への欲求・市場への応用”の２点を重視した“循環教授モデル”を示している。BS 方程式では、原証券である株価の変動モデルとして一般化したウィーナー過程を仮定しているためこのブラウン運動を学習することは、BS 方程式の土台と言っても過言ではなく、この重要性を教授する（①、②)。その後、BS 方程式を学習し、“不確実な価格変動”を定量的に算出できるというBS 方程式の重要性[20]、ならびに市場への理論の応用の醍醐味を盛り込む（③)。そしてここが重要な点であるのだが、③の時点ではブラウン運動が微分不可能な点は教授せず、その一方でBS 方程式は確率を元に計算されていることを教授する。それにより④を学習する際、学習者に“ブラウン運動が微分不可能なのになぜ、BS 方程式はオプション価格を算出できるのか”という疑問を抱かせ、知識の獲得への欲求を生み出すことをねらいとしている。そして、最終的に⑤の伊藤の補題を学習することで、BS 方程式の重要性を再確認するとともに、数学的・統計的知識の補完を試みる。このように既存の教授法とは異なり、市場への応用と基礎理論を循環させることで、BS 方程式は理解できる。そしてこの循環のフローは、上記に提案したように学習者の知識獲得への欲求を促進するものでなければならない。以上が、BS 方程式を理解するための教育方法の提案である。

４．おわりに

BS 方程式は、金融においては当たり前の考え方である。しかし、その一方で経済学を学ぶ大学生や社会人はこの知識の獲得に至ることができない。その原因は、学習者の視点の欠如ではないだろうか。０から１００までを教えるのは、教育ではない。今回の提案により、学習者がBS 方程式の概念の獲得をするだけでなく、教育者に学習者の視点を思い起こしてもらいたい。

参考文献

(1)石村直之：“現象から方程式を創り出す第16 回―立式で鍛える論理的思考力―ブラック・ショールズ方程式”，数理科学No. 575, 特集：「初学者を悩ます数理の概念」― 理解のためのヒントを探るーサイエンス社, 2011年5月号, p71-76(2011).
(2)一石賢：“道具としての統計解析”，日本実業出版(2004).
(3)小林道正：“デリバティブと確率”，朝倉書店（2001）.
(4)土井薫：“文系人間のための金融工学の本”，日本経済新聞社（2004）.
(5)仁科和彦：“現代ファイナンス理論入門”，100 頁，中央経済社(1997).
(6)藤田岳彦：“道具としての金融工学”，日本実業出版(2008).
(7)藤田岳彦：“1997 年：ブラック-ショールズ方程式の台頭(特集 この 20 年で数学に何が起こったか)”，数学セミナーNo595 特集：この20年で数学に何が起こったか，2011年4月号，p39-47（2011）.
(8)松原望：“入門確率過程”，東京書籍（2011）.
(9)真壁昭夫：“はじめての金融工学”，講談社現代新書(2005).

た統計量によって説明することができ、さらに、ポートフォリオの銘柄を増やすほどリスクは低減できる。
[20] 定量的に価格変動を捉えることができないことを指す。