群論を用いた数学教育

新井一成[*1]・高數学[*2]
Email: koffice@u-gakugei.ac.jp

*1: 東京学芸大学個人研究員
*2: 東京学芸大学

◎Key Words 群論, 数学教育, 操作

1. はじめに

数学における種々の説明は、群論を用いて行うことが可能である。例えば、自然数の四則演算において加法および乗法の計算を行った結果が自然数となる一方で、減法および除法の計算結果は必ずしも自然数にならない。このことを群の概念を用いて説明すれば、自然数は加法ならびに乗法にたいし群をなしているといえる。また加法および乗法は符号の前後の数を並び替えても結果が等しいが、これは加法と乗法が可換性を持つためである。このように、群論は数学の基礎をなす概念でありたいへん重要であるが、本格的な学習は高等教育機関に任されており、高校数学までで学習者が群を意識する機会はほとんどないといえる。

本研究では、高校数学の整数および文字の演算において、どのように群の理論を導入すべきか、教育内容を検討する。高校数学の基本となる整数・文字の演算において群論を踏まえた教育内容を展開することで、四則計算にとどまらない、演算の「操作」への関心を高めることを目的とする。そのことを通じて、学習者の数学的思考力を養うきっかけをつくる点に本研究の意義がある。

2. 群の理論の概要

2.1 群の定義

ものの集まり G が次の条件を満たすときが群である[1]。

定義１．G の任意の元 a,b に対して、乗法、または積と呼ばれる演算 ab が定義されている。このとき ab は G の元となる。

定義２．３つの元 a,b に対して、$a(bc)=(ab)c$。(結合則)

定義３．全ての元 a に対して、$ae=ea=a$ なる元が存在する。(単位元)

定義４．全ての元 a に対して、a^{-1} が存在し、$aa^{-1}=a^{-1}a=e$。(逆元)

以上が群の定義である。この定義から、群に関する無数の性質が得られるが、以下では本研究との関連のある性質を挙げる。

2.2 群の諸性質(今後詳しく書く)

・可換群(アーベル群)／非可換群

群 G のかけ算において、

$ab=ba$ がつねに成り立つとき、G は可換群である。つねに成り立つとは限らないとき、G は非可換群。

・加群

G において、記法 $a+b=b+a$ が成立する群のこと。

・巡回群

群の元にたいし何度か操作を行うと、自分自身に戻ってくる性質をもつ群のこと。例えば正方形 ABCD を 90 度回転させる変換は、4 回行うことで元の頂点と完全に一致するので、巡回群をなす。

・置換群(n 次対称群 S_n)

元の並びの順序の変換を意味する群のこと[2]。例えば記号 XYZ において、「n 番目と m 番目の順序を入れ替える」変換は置換群をなす[3]。

・交代群(n 次交代群 A_n)

ある置換群のうち、偶置換のみを抜き出した部分群を指す。

・剰余類

任意の整数を、ある数 m で割った余りの等しいものでまとめた群のこと。例えば７の剰余類であれば、{-7,0,7,14…},{-6,1,8,15,22…}など、７つの剰余類が存在する。

・準同型

２つの群 G,G' において、G から G' への対応 Φ があるとき、$\Phi(g_1g_2)=\Phi(g_1)\Phi(g_2)$ が成り立つもののこと。

以上が本研究に関連する群の性質である。次に、具体的な高校数学の範囲で、上記の定義や性質がどのような箇所の背景にあるのか、検討していく。

3. 諸概念の群論による説明

ここでは整数の演算について検討するが、整数の演算などを内部に含むことになる三角関数や平面図形なども検討範囲に含めた。

3.1 群の定義と整数の演算の関係

定義１において、G ＝整数の集合、とする(通常 Z と書く)。整数×整数の結果も整数であるが、このことを

[1]本章以降の群の説明は、およそ志賀(1989)に依った。

[2]なお置換群には偶置換と奇置換がある。

[3]「２番目と３番目を入れ替える変換」ならば、XYZ は XZY となる。この場合、条件をみたす変換は６つ存在するので、この置換群の元の数は６である。

G の元 a,b と積 ab で表記することができる。また、積の演算はいわゆる掛け算である必要性はなく、加減乗除、累乗・三角関数の値など多くが想定されるが、群として扱うためにはすべての積が G 内に入るように条件づける必要がある[4]。整数は加法・減法について群をなしている。また乗法において、数 0 は定義4を満たさないため、0を除く整数は乗法について群をなしている。このように、同じ集合であっても群をなすかどうかはそれぞれの演算ごとに判断される。

3.2 群の諸性質と整数の演算の関係

多岐に渡るため箇条書きで挙げる。具体的な関連づけは PC カンファレンス当日にて提示する予定である。

(i)群の定義自体によるもの
・分数の計算における「割り切れ保証」
・二次式における係数比較法
・ルートの有理化
・素因数分解およびその一意性
(ii)可換性/非可換性によるもの
・三角比における角度の加法にかんする性質
(iii)巡回群を利用すると理解の助けになるもの
・ユーグリッド互除法における不定方程式の一般解
・高次方程式の解の配置
(iv)置換群を利用するもの
・因数分解における対称式と交代式
・三角関数の平行移動と $sin\,\theta, cos\,\theta$ の変換
(v)剰余類を利用するもの
・合同式
(vi)準同型であることを利用するもの
・角度や長さの異なる平面図形における同一の定理の適用

教科書を概観する限り、群論をにおわせる記述はほとんど出てこない[5]。しかし上記で分類したように、ほぼ全ての分野で、部分的にではあるが、群論と結びつけて考えることのできる箇所が存在している。

次章ではこのことを踏まえ、

4. 教育内容の提案

4.1 教育内容の概要

・対象：高校２年生(数学 IA 履修済・IIB 履修者)
・目的：演算の背後にある操作のルールを把握することで、学習者のもつ、数式操作に伴う理解の困難さを多少なりとも緩和すること。
・教育内容：群論を通じて、高校数学の演算は可換群からなる計算と、非可換群からなる計算に大きく分けられることに気づくことができるカリキュラムの提案を行う。
・留意点：数学における群は、単に数字や要素だけでなく、様々なレベルにおいて成り立っている。そのため可換・非可換の概念も、たんに教科書に記述されるレベルの定理にとどまらず、数式操作にまで踏み込んだカリキュラムとすることが望ましい[6]。

4.2 カリキュラムの検討

可換・非可換の操作のそれぞれの例について具体的に触れる。

・可換の具体例：ある与えられた数式・文字式にたいし、「展開または因数分解」の操作を行うことができる。このとき、「展開」の操作と「因数分解」の操作は逆操作にあたるので、この操作の群は任意の数式・文字式にたいし位数２の巡回群をなしているといえる。また、ある公式にたいし、具体的な数値や文字を代入して考える操作それ自体が群をなしており、操作の集合は置換群であるともいえる。

$$\text{展開} \underset{g^{1}}{\overset{g}{\rightleftarrows}} \text{因数分解}$$

図１ 「操作」における位数２の巡回群

・非可換の具体例：平面図形における作図は、コンパスと定規を用いて行われるが、これらの操作は互いに非可換である。全く同じ操作を行ったとしても、定規で二点間を結んだ後にコンパスを用いた結果と、コンパスを用いた後に定規で二点間を結んだ結果は、通常明らかに異なる。

このように、教科書であまり意識的に記述されることの少ない、定理や性質、物理的道具などを用いた「操作」それ自体の可換性・非可換性を理解することは、学習者の数学の理解の補助となる重要な議論であると思われる。

5. おわりに

以上、本研究は群の定義にはじまり「操作」の群にかんするカリキュラムの提案を行った。学習者が「操作」について学習者が意識をめぐらすことは、いかなる場合に定理が適用できるのか、またその順序は妥当であるのか、に注意を向けることである。そのことを通じて、学習者が数学的「操作」に興味関心をもち、学習者が数学的思考力を養う基礎づくりに少しでも貢献できれば幸いである。

参考文献

(1) 志賀浩二,『群論への 30 講』,朝倉書店,(1989).
(2) Piaget.J, 芳賀純訳:”論理学と心理学,評論社 ,(1966)(”*Logic and Psychology,University of Manchester at the University Press*,(1953)).

---

[4]別の表現をするならば、定義１はいわゆる「閉じている」状態であるといえる。

[5]唯一、「実数」の定義にあたっては、加法・減法・乗法・除法がつねに成り立つか否か、表にまとめたり穴埋めを行わせたりすることも教科書によってはあることにはあるが、群の理論を知らない学習者がそこに気がつくことは容易なことではない。

[6]なおひとの認識と「操作」の関係性については、Piaget(1953)が詳しい。Piaget とコンピュータの関連を論じた文献は多い。