

Piaget 発達段階論の圏論的展開

- Papert(1980)をモチーフとして -

新井一成*1・高数学*2

Email: koffice@u-gakugei.ac.jp

*1: 東京学芸大学個人研究員

*2: 東京学芸大学

◎Key Words 発達段階論, 構築主義, 圏論

1. はじめに

本研究の目的は、J.Piaget の発達段階論を、圏論を用いて発展的に解釈することである。

構成主義教育で有名な Piaget の理論に、子どもの知識や学習の発達の過程について論じた発達段階論がある。Piaget が発達段階論について触れたものには『発生的認識論序説』(1950)をはじめ多くがあるが、本研究では、ひとの認知構造を中心に扱った『論理学と心理学』(1953)^①に着目する。Piaget(1953)は、ひとの認知構造をいくつかの論理的要素に分解し、関係性を束論の観点からとらえた。認知構造を束論的にとらえることで、各々の発達段階における構造の共通点・相違点がわかりやすく把握できるため、論理プログラミング言語 Prolog などによるコンピュータ上での表現が容易になる点にメリットがある。その一方で、各発達段階の前の段階の構造が、いかにして次の段階へと変化するのか、という時間的変化の観点からの説明が明らかでない点に理論上の課題がある。

そこで本研究では、理論上の課題へのアプローチとして、S.Papert 『マインドストーム』(1980)^②の理論を援用する。Papert(1980)は Piaget の構成主義的発想を受け継ぎ、構築主義を提唱した。Papert の構築主義は知識の論理構造の日常言語による記述が多く、より柔軟な理論モデルが要求される。本研究では、束論よりも柔軟な形で構造を捉えることのできる、圏論によるモデリングを試みた。圏論によるモデリングは、構造が変化する過程のメカニズムを考察するのに役立つ上、プログラミング言語 Haskell などとも相性が良い。

2. Piaget(1953)の発達段階論

まず、本研究の根幹をなす Piaget の発達段階論を、その論理的側面に注目しつつ整理を行う。

2.1 発達段階論の定義

Piaget の発達段階論は、以下の4つの段階に分けられる^①。

1. 感覚運動期(0~2歳): 操作的性格を持たないが、可逆性に向かう傾向があり、不変性(保存)が構成されている。
2. 前操作期(2~7歳): 具体的操作期に比べて不完全な可逆性をもつ。特に推移律が構成されない。

3. 具体的操作期(7~11歳): 動的均衡、すなわち可逆性を獲得。包含と認識の具体的諸操作が認識可能。分類の操作、系列化の操作、加法と乗法の操作等のシエマがそれぞれの関係を考慮せずに構成されるため、変換の全体が形成されず、数・時間・体積などの各操作ごとに独立した構造が与えられる。初歩的群性体を構成する。

4. 形式的操作期(12歳~): 構造化された操作の全体である論理的群性体を得る。操作が具体的資料から離れ、理論から出発して理論上の諸関係の操作が理解できるようになる。成人の論理といえる。

ひとの認知構造を、以上の4つに分けて考えたことが発達段階論の特徴である。Piaget は、下位の段階の認知の論理構造は上位の段階の構造に包含されると主張する。したがって、感覚運動期・前操作期・具体的操作期を包含することになる形式的操作期の論理構造の解明が最も重要といえる。

2.2 発達段階論の論理的展開

Piaget は、ひとのさまざまな順序の認識の可能性に着目した。例えば大きさの順序、すなわち包含順序においては、例えば3つの集合 B, A, A' において、 $B = A + A'$ が成り立つならば B が最大であり、 A と A' は B に含まれること、 A' は元の式を変形して、 $A' = B - A$ で求められること、などがいえるが、これらの操作は具体的操作期に入ってはじめて認識可能になるという。第三段階である具体的操作期においては、高さの順序や大きさの順序がそれぞれ別々に半順序束を形成する^②。

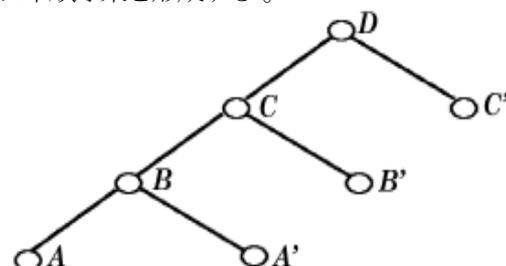


図1 具体的操作期の半順序束による表現^③

^② 原文では「半束」とよばれており、半順序束であるとの明言はないが、明らかに最小上界が存在し、空集合を最大下界としても差し支えないので、本研究では半順序束として扱う。

^③ Piaget(1953)邦訳 p.13. 『論理学と心理学』の前文である、W.Mays 「ピアジェの論理学序説」の Table(d). なおこの図自体、Piaget(1949) 『論理学概論』の再掲であるようだ。

^① この区分自体、Piaget の著書のうちでも揺れがみられるが、ここでは Piaget(1953)の区分に従った。

また、Piaget『構造主義』(1968)⁴⁾によるとひとの認識の論理構造は全て操作的であり、任意の要素の間に最大下界と最小上界が認められる、いわゆる束の構造をもつという。操作の構造は群論によって支えられ、全体性・変換性・自己制御性をもつ。Piaget(1953)では形式的操作期における操作の束構造は、端的に恒等変換 I ・逆関係 N ・相互関係 R ・相関関係 C という4つの変換からなる論理的群性体である、 $INRC$ 群で説明できると主張される。例として2つの命題 p, q で説明する。

- 恒等変換 I : $p \vee q$ の恒等変換は $p \vee q$
 - 逆関係 N : $p \vee q$ の逆関係は $\bar{p} \cdot \bar{q}$
 - 相互関係 R : $p \vee q$ の相互関係は $\bar{p} \vee \bar{q}$
 - 相関関係 C : $p \vee q$ の相関関係は $p \cdot q$
- 図示すると以下ようになる。

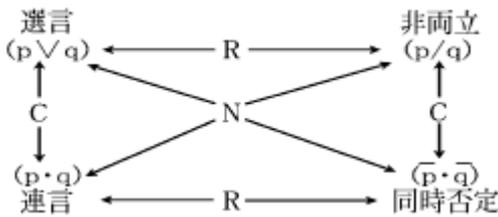


図2 2命題間の $INRC$ 群

形式的操作期においては、この束構造の群性体を包含する形で、さらに第二次群性体が形成されるという、二重構造モデルになるという。第二次群性体は p, q, \bar{p}, \bar{q} の4つの命題の論理和 \vee および論理積 \cdot からなる、以下の16の命題において形成される。

表1 16命題間の $INRC$ 群⁴⁾

1 (0)	2 ($p \cdot q$)	3 ($p \cdot \bar{q}$)	4 ($p \cdot (q \vee \bar{q})$)
5 ($\bar{p} \cdot \bar{q}$)	8 ($p \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q}$)	11 ($p \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q$)	14 ($q \supset p$)
6 ($\bar{p} \cdot q$)	9 ($p \cdot q \vee \bar{p} \cdot q$)	12 ($p \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q$)	15 ($p \vee q$)
7 ($\bar{p} \cdot (q \vee \bar{q})$)	10 ($p \supset q$)	13 (p / q)	16 ($p \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q}$)

表1においても、二命題のときと同様に、 $INRC$ の4つの変換規則が成り立つ。Piaget は以下の7つの性質が確認できるという。

1. 命題8から16は、2, 3, 4と5, 6, 7の論理和 \vee で表される。命題8は命題2と命題5の論理和。
2. 命題1~3, 5~11, 6~12は、4, 14, 15と7, 10, 13の論理積 \cdot で表される。命題8は命題14と命題10の論理積 \cdot 。
3. 各命題は、この図の中心を点対称として、逆関係 N を形成する。命題2の逆は命題13。
4. 各命題は、この図の対角線1, 8, 12, 16を線対称として、相互関係 R を形成する。命題14の相互関係は命題10。
5. 各命題は、この図の対角線7, 9, 11, 4を線対称と

して、相関関係 C を形成する。命題2の相関関係は命題15。

6. 対角線1, 8, 12, 16上の4命題は、 $I = R$ および $C = N$ の特性をもつ。
7. 対角線7, 9, 11, 4上の4命題は、 $I = C$ および $R = N$ の特性をもつ。

参考までに、上述の束構造を図示すると以下のようになる。

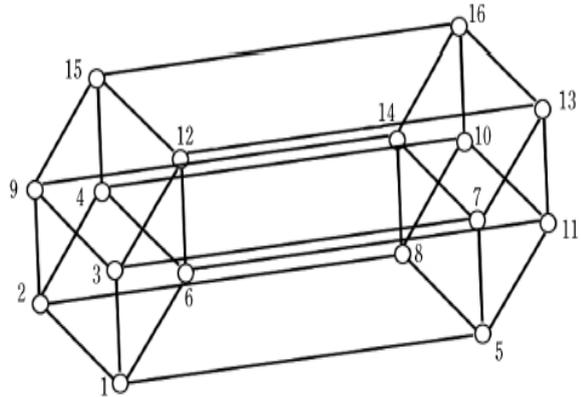


図3 形式的操作期の半順序束による表現⁵⁾

以上が、発達段階論の概要である。発達段階論を論理的側面から検討すると、Piagetの主張する、下位の段階の認識の論理構造は上位の段階の論理構造に包含される、という点が記述や図表からあまり明快に読み取ることができない点に、理論的課題があるといえる。本研究ではこの課題を踏まえ、具体的操作期における構造が、いかんして形式的操作期の構造へと変化するのかについて検討する。

2.3 発達段階論のコンピュータによる表現

論理プログラミング言語 Prolog は、事実(ホーン節)・規則(ルール節)・質問(ゴール節)の3つからなるプログラムである。よく知られた手続き型言語とは異なり、予めプログラムしておいたホーン節・ルール節をひとの「知識」に見立て、ゴール節を通じて必要な知識を取り出す、宣言型の言語である。Prolog は順序集合や束論と相性が良く、図1や図3のように束構造のHasse図を手作業で書かなくとも、命題間の関係性の可視化が容易にできる点にメリットがある。例えば各段階のホーン節をプログラミングし、それらを重ねると以下の図が得られることが判明している。

⁵⁾Piaget(1953)を元に執筆で作成。なお16の命題における $INRC$ の諸構造がどのような関係があるのかについて、新たなモデリングを現在検討中であるが、本研究の目的から外れるため、これ以上踏み込まない。

⁴⁾ Piaget(1953),邦訳 p.57.

porder (p1,p2).	piagetorder (X,Z):-
porder (p1,p3).	porder (X,Z).
porder (p1,p6).	piagetorder (X,Z):-
porder (p6,p12).	porder (X,Y),porder (Y,Z).
【ホーン節 (骨格部分)】	【ルール節 (骨格部分)】
poperation (p1,p1,p16,p1,p16).	i (X,Y):-poperation (X,Y,_,_).
poperation (p2,p2,p13,p5,p15).	n (X,Y):-poperation (X,_,Y,_,_).
poperation (p3,p3,p10,p6,p14).	nc (X,Z):-c (X,Y),n (Y,Z).
poperation (p15,p15,p5,p13,p2).	ncr (W,Z):-r (W,X),c (X,Y),n (Y,Z).
【ホーン節 (変換部分)】	【ルール節 (変換部分)】

図4 PrologによるINRC群の表現

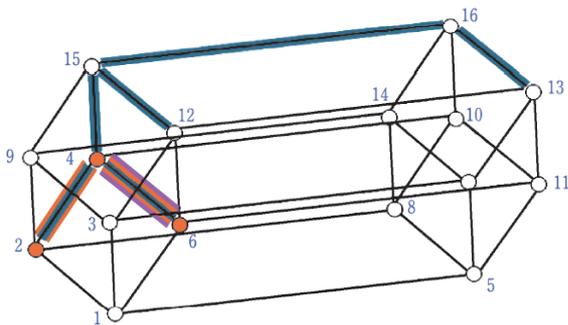


図5 PrologによるINRC群の半順序束の表現

3. Papert(1980)における学習者の「操作」

つぎに、Papert(1980)に代表される構築主義について概観する。PapertはPiagetとの共同研究者のひとりとして、教育用プログラミング言語LOGOを開発し、MITのScratchなどにも影響を残した。

3.1 子どもの学習とコンピュータ

Papertは、子どもが学習する際、道具としてのコンピュータがいかにか有効であるか、いかにか有効に活用すべきか、について、子どものLOGOプログラミングを観察することを通じて整理した。構築主義理論で特筆すべき発想は以下の二点である。

1. デバッグ：現実世界に存在するある問題を子どもが考える際に、その手順を書いたプログラムを実行する。子どもの思ったとおりにプログラムが動かない場合に、プログラムを修正する作業を通じて、現実世界の問題の解決方法を学習することができる。
2. マイクロワールド：子どもの自由なプログラミングによって、ある法則性に基づく架空の世界を構築することができる。これはNewtonの法則のように実際に正しいものだけではなく、仮に誤った法則をもつ世界であっても、子どもの創造性を支え、正否の基準に支配されることのない知的環境を作り出す点で意味があるとされる。
3. 数学学習：ひとが数を学ぶことがなぜ可能であるか、ほとんどの数学者は意識しないが、そこに意図せず光を当てる学派として、ブルバキ構造主義を

挙げている。子どもが、デバッグやマイクロワールドを通じて極めて初歩的な群論や束論を理解することで、子どもの知識構造に変化が起こるとされる。

これらを踏まえると、Papertの関心はPiaget同様、子どもの認識の論理構造にも向けられているといえる。

3.2 Papertのエージェント理論

Papertは原則的に、Piagetの発達段階論を正しいものとして踏まえているが、特に具体的操作期における、さまざまな順序関係のうち、子どもにとってどちらの判断が優位になるのかについて、液体の量の順序を例に理論的な考察を行った。この点は、先述の具体的操作期の構造がいかにかして形式的操作期の構造へと変化するのかという、発達段階論の課題のひとつに該当する。

Papertは説明のために、それぞれ違った「幼稚な」やり方で判断する4人のエージェントが子どものなかにいる、と仮定した。

1. 高さのエージェント：液体の量の大小関係を、垂直的な高さによってのみ判断するエージェント。高ければ高いほど、液体の量は多いと判断する。
2. 広さのエージェント：液体の量の大小関係を、上からみた面積によってのみ判断するエージェント。広ければ広いほど、液体の量は多いと判断する。
3. 歴史のエージェント：以前の大小関係の判断経験を踏まえて、今回の大小関係を判断するエージェント。量が増えたかどうかは一切考慮せず、前回の比較の結果のみに従う。
4. 幾何のエージェント：高さのエージェントと広さのエージェントの監督者として働くエージェント。普段は働かないが、ある条件を満たすと権威をもち、意思決定を行う。

これら4人のエージェントが存在するとき、以下のいずれかの相互作用が起き、大小関係が判断される。

- I).保存を知る前の子どもであれば、幾何のエージェントを除く3人がそれぞれに独自の結論を出し、それに従うよう主張する。この段階では高さのエージェントが最も声が大きい。
- II).高さと広さのエージェントが「洗練」されてくると、たとえば断面積が同じでない場合は高さのエージェントが判断する資格を失う。
- III).「先任順」、すなわち判断に対する声の大きさが変わり、たとえば突如歴史のエージェントが優勢になる。
- IV).高さのエージェントと広さのエージェントの間で矛盾した意見が出たとき、突如新しいエージェントである幾何のエージェントが出現し、2つのエージェントの監督を行う。2つのエージェントの意見が同意する場合、幾何のエージェントは権威を持ってその意見を宣言するが、意見が異なる場合には彼の権威は損なわれ、高さと広さのエージェントが中和されたこと

のみを報告する。幾何のエージェントは高さや広さのエージェントの決断の理由を「理解」せず、同意の有無とその方向性のみを監督する。

これら相互作用のうち Papert が注目するのは IV) で、監督者の監督下におかれたエージェント同士の意見が中和するモデルを考えることは、知的操作を群性体に編成するという Piaget の考えに共通するものだと主張される⁶。この主張は、具体的操作期における高さや大きさのそれぞれの半順序束が、形式的操作期における 16 命題の群性体に取り込まれていく過程を示唆している。その一方で Papert は、エージェント間の相互作用は数学的な論理の操作というよりも社会的な相互作用に似たものであると主張するため、エージェントの相互作用を、厳密な束構造をもつ Piaget の論理的群性体に直接当てはめて考えることができない。

そこで本研究では、Papert のエージェント理論を用いて Piaget の具体的操作期と形式的操作期の間の変換のメカニズムに少しでも迫るべく、圏の理論を用いる。

4. 結論にかえて：圏論によるモデリング⁷

C が以下の定義をみたすとき、 C は圏である。

1. C は対象 $A, B, C \dots$ と矢 $f, g, h \dots$ から構成されている。
2. C の任意の矢 f には、始域と呼ばれる対象 A と終域と呼ばれる対象 B が伴っており、 $f : A \rightarrow B$ と表される。
3. C の任意の矢 f, g において、 f の終域と g の始域が合成矢 $g \circ f$ が存在する。3つ以上においても成り立ち、 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ がいえる。
4. C の任意の対象 B には、 $B \rightarrow B$ なる矢 id_B が存在する。

圏 C の例としては集合の圏、群の圏、半順序圏などが存在する。本研究では、具体的操作期ならびに形式的操作期のそれぞれの関係を考えるので、無数の半順序束同士の関係を考える、半順序圏を採用する。圏論を用いたモデリングにはさらなる検討が必要であるが、本研究では圏論モデルのなかでも、pullback ならびに関手概念にもとづき以下の図示をすることで結論にかえたい。

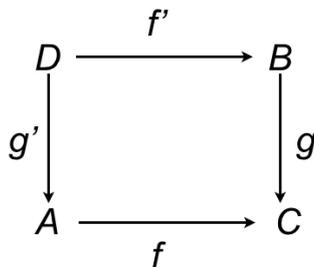


図6 pullback の定義

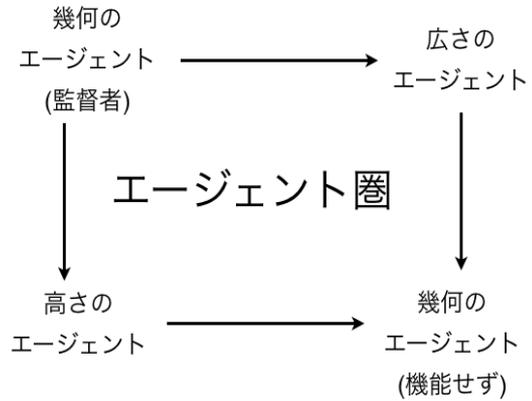


図7 pullback によるエージェント理論の解釈

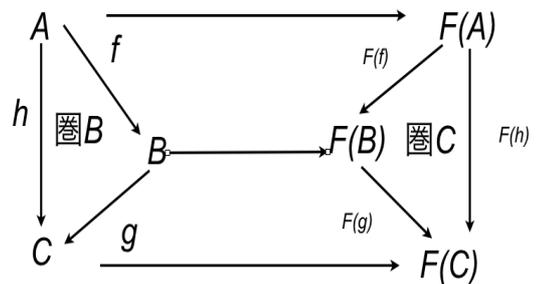


図8 関手の定義

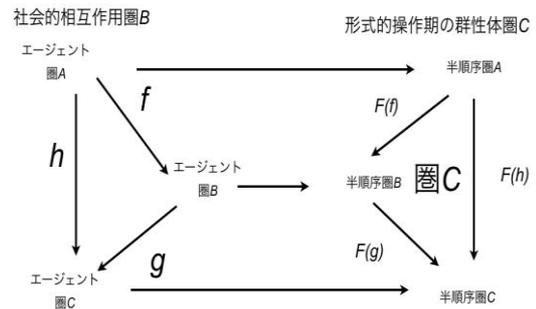


図9 関手による形式的操作期の解釈

5. おわりに

PC カンファレンス当日は、上記のモデリングの詳細な解釈について提示する予定である。

参考文献

- (1) Piaget, J., *Logic and Psychology*, University of Manchester at the University Press, (1953). 芳賀純訳：“論理学と心理学”，評論社，(1965).
- (2) Papert, S., *Mindstorms Children, Computers, and Powerful Idea*, Basic Books, Inc., (1980). 奥村貴世子訳：“マインドストーム—子ども、コンピューター、そして強力なアイデア”，未来社，(1982).
- (3) 清水義夫：“圏論による論理学”，東京大学出版会，(2007)

⁶ Papert(1980),邦訳 p.195.

⁷ 以下、圏論に関する定義や図は清水(2007)⁶⁾に従った。