t 検定を中心にした統計・確率の教育方法

新堀友太[*1]・吉松雄太[*2]・高數学[*3]
Email: a090131k@st.u-gakugei.ac.jp

*1：東京学芸大学教育学部初等教員養成課程
*2：東京学芸大学人間社会科学課程総合社会システム専攻
*3：東京学芸大学

◎Key Words　t 検定, 統計学, 確率論

1.　はじめに

近年、統計やそれを学ぶ学問である統計学は非常に注目されている。IT の進歩により様々なデータを保存・管理することが容易となり、それらによって多くの分野の研究・ビジネスが、今までのプロセスを変えることとなった。そうした管理・保存されたデータを価値あるものとして見出していく際、統計手法による解析・分析は非常に効果的であり、それを学ぶ統計学はあらゆる分野に対して必要となる重要な学問となっている。

また統計において確率は重要なものである。なぜなら実際の事象を統計手法で分析することは難しく、事象を数量として扱うための測度が必要だからである。その際確率は非常に有用な測度であるといえる。過去において統計は近代確率論の結果を受けて発展していき、現代の統計の基礎は、そういった過去の統計の蓄積の上で成り立っている。このことからも、統計を学ぶ上で確率の理解が重要であるということがわかる。

t 検定は帰無仮説が正しいと仮定した場合に統計量が t 分布に従うことを利用した統計仮説検定であり、小標本での正規母集団の母平均や、回帰係数の優位性検定などに広く用いられる。t 検定は多くの統計手法が当てはまる一般線形モデルを用いた手法であり、統計・確率の基礎的な知識が含まれているため、これを学習することは統計学・確率論の総合的な理解につながると考える。

しかし従来の統計学の学習において、t 検定は検定の入門として扱われる事が多く、検定をいかに扱うかという点に学習の重点が置かれるため、統計学的実用性の説明に偏ってしまう。また統計学の学習過程全体においても、t 検定・回帰分析といった統計手法をそれぞれ別のものとして扱うため、それぞれの手法の理解のみに留まってしまい関係性の理解につながらない。その結果、統計学全体の理解や、統計学・確率論の総合的な理解につながらない。

そこで本研究では、統計を学ぶ初学者を対象とし、t 検定を中心とした教育方法について検討する。

２では本研究における統計・確率を定義し、３では現在の統計教育について整理し問題提起を行う。４で t 検定を中心とし統計教育を行う意義を検討し、５では一般線形モデルについて説明をする。そして６で t 検定を中心とした統計・確率の教育方法について検討を行う。

2.　統計と確率の定義

統計は一般に次のように言える[(1)]

「統計(statistics)という用語の基本的な意味は、集団を記述する数量ということである」

集団とは、何らかの意味で同質とみなされ、同時に諸特徴・属性は均一でなく不規則に変動しているような個体の集まりのことを指す。

また確率は一般に以下のように定義する。[(2)]

(Ⅰ)$A \in \mathfrak{F}$に対し$P(A) \geq 0$

(Ⅱ)P(Ω)=1

(Ⅲ)$A_1, A_2, A_3, \cdots \in \mathfrak{F}$で$A_i \cap A_j = \varphi(i = j)$ならば

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

ここで$\mathfrak{F}$は完全加法族である。[1]このとき$\Omega, \mathfrak{F}, P$を組にした$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$を確率空間といい、各$A \in \mathfrak{F}$に対し$P(A)$を事象 A の確率という。

確率は確率測度の一般的な呼称であり、つまり何らかの事象を数量的に測る際に用いられるものである。

3.　問題提起

従来の統計教育では、検定・分析といった統計手法をそれぞれ別のものとして取り扱う。t 検定はその統計教育において、統計手法の入門として取り扱われることが多く、統計学的実用性の説明や、統計仮説検定そのものを理解するための具体的な例として扱われる。そのため確率論の視点からの説明は簡単にしかなされておらず、結果として統計学・確率論の総合的な理解につながらない教育方法となってしまっている。またその他の統計仮説検定や統計手法とは別のものとして学習するため、統計手法の入門としてそれぞれの関係性の理解にもつながっていない。

一方統計手法を実際に扱う場合、様々な統計ソフトを用いることによって理論がわからなくても検定や分析を行うことができる。そのため本来理論によって決定されるべき統計手法の選択ができず十分な結果を得られない、もしくは結果に対する裏付けが欠落してしまうといったことが起こる。

そこでこれらの問題を解決するために t 検定を中心とした新しい統計・確率の教育方法を検討していく。統計を学ぶ初学者に対し、t 検定から一般線形モデルを教育し、様々な統計手法にその一般線形モデルやそれ

[1] 完全加法族とは集合族の一つであり、特徴として$\mathfrak{F}$の元 A に可算無限が許されることがあげられる。[(2)]

を拡張した一般化線形モデルが用いられていることを教育することで、それぞれの統計手法に関連を持った理解につながると考える。またその教育の過程で大数の法則・中心極限定理といった統計学・確率論における重要な定理についても教育することで、統計学・確率論の総合的な理解につながると考える。

次章では t 検定を中心に教育する意義について述べる。

表 1 統計学入門書による統計手法の扱い

著者 “タイトル”	t 検定についてと前後の章立て	手法の扱い 巻末の索引
盛山和夫 “統計学入門[3]”	P145,8.4 7.確率変数とその分布 9.クロス表の読み方と検定	線形モデル：× 回帰分析ファミリー[2]
森棟公夫 “統計学入門第２版[4]”	P186,6.2 5.母数の推定 7.線形関係の推定	線形モデル：P215（線形回帰式）
田栗正章 “統計学とその応用[5]”	P224,9.2 8.区間推定論 10.ノンパラメトリック検定法	線形モデル：×

4. t 検定を中心に教育する意義

4.1 統計手法を中心に教育する意義

t 検定という統計手法を中心に教育することで、学習者は従来の統計学で感じるような実践と理論の乖離を感じることなく、理論に基づいた手法の運用が負担なく可能になると考える。学習者にはまず t 検定を理解する上で必要な理論に絞って教育し、それが実際の統計でどのような働きをしているかということについて t 検定を通して学ばせることで、統計と確率の関係性を感覚的に理解しやすくなると考える。

さらに統計手法の基本となるデータの選別・収集、標本抽出、帰無仮説といったものについて、実際のプロセスを通してそれらがどういったものであるか、そして統計手法においてどうしてそれらが必要であるのか、ということを理解することができると考える。

4.2 t 検定を中心とした統計学・確率論への発展

また t 検定を中心として教育することで、統計学・確率論それぞれに発展しやすいことも教育のメリットであると考える。t 検定をとおして一般線形モデルを学習できることは統計手法を整理して理解できることにつながると考える。それは統計の様々な仮説検定法や分析手法は、一般線形モデルもしくはこれを拡張した一般化線形モデルに当てはまるからである。t 検定を通しこの一般線形モデルを理解することにより、他の統計学的手法が別々のものではなく関連を持っていることがわかり、さらに一般線形モデルを理解できれば一般化線形モデルについても理解しやすくなることから、t 検定からその他の統計手法の教育へと発展していけると考える。

また統計学・確率論において重要な定理である大数の法則を、実際に t 検定を扱うことで感覚的・直感的に理解でき、そこから確率論へ発展していくことが可能と考える。大数の法則は中心極限定理と並び統計・確率を理解するにあたり重要な定理である。「標本数が十分に大きいとき、観察された標本平均を母平均とみなしても良い」ということを確率論で厳密に証明したものであり、以下のように定義される。[2]

①大数の弱法則

$X_1, X_2, \cdots, X_n$が独立で、同一の確率分布に従うとし

$$E(X_i) = \mu, \qquad V(X_i) = \sigma^2 \ \ (i = 1,2,\cdots,n)$$

とすれば

$$n \to \infty のとき \ \ \bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{P} \mu$$

すなわち、$\varepsilon > 0$を十分に小さい量として

$$n \to \infty のとき P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \to 0$$

が成立する。

②大数の強法則

$X_1, X_2, \cdots, X_n$が独立で（同一の確率分布とは限らない）

$$E(X_i) = \mu, \qquad V(X_i) = \sigma^2 \ \ (i = 1,2,\cdots,n)$$

とすれば

$$n \to \infty のとき \ \ \bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \to \mu$$

すなわち次式が成立する。

$$P\left(n \to \infty のとき \bar{X}_n \to \mu\right) = 1$$

また中心極限定理とは$X_1, X_2, \cdots, X_n$が独立で、同一の確率分布に従うとき、nが大ならばもとの確率分布がなんであっても

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \quad は \quad N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$\bar{X} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} \quad は \quad N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

に従うと考えてよいとするものである。[2]

この大数の法則・中心極限定理はいずれも極限定理である。[3]統計においては大数の法則により標本平均が母平均から大きくはずれる確率が極限では 0 であることがわかる。また中心極限定理によりいかなる分布に従う母集団から標本を取り出しても、標本数が十分大きければ標本統計量は正規分布に近似できる事がわかる。さらに確率論においては、この大数の法則・中心極限定理は、例えばランダムウォーク・ブラウン運動を理解する際に必要となる定理である。ランダムウォーク・ブラウン運動は金融工学分野においては Markowitz 理論や Black-Scholes 方程式を用いたオプション価格理論では株価の「ランダム・ウォーク仮説」が前提にされているなど、様々な分野で広く用いられている。

2 回帰分析ファミリーとは重回帰分析・分散分析・共分散分析を基本的に同じ構造を持つものとしてまとめたものである。その構造は一般線形モデルで説明できる。

3 極限定理とは、一般に確率変数（あるいは確率過程）やその分布の列についての何らかの意味での収束に関する定理を指す。[1]

5. 線形モデル

5.1 一般線形モデル

一般線形モデルは以下のように説明できる。(1)互いに独立なｎ個の観測値$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$を得たとする。これらｎ個の観測値は同一母集団からの無作為標本とみなすことはできないとする。分散はｎ個の観測値を通して一定値であると仮定すると

$$E(Y_i) = n_i\ , V(Y_i) = \sigma^2 \qquad (1)$$

と書ける。n_iの値は、Yに関係するp個の変数のiのときの値$(x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{ni})$があたえられたとき

$$n_i = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_n x_{ni} \qquad (2)$$
$$i = 1,2, \cdots, n$$

と表されているものとする。

行列で表現すれば

$$E(Y) = n\ , V(Y) = \sigma^2 I \qquad (3)$$

となる。ただし、I は n 次単位行列で $Y = \left(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n\right)^t, n = \left(n_1, n_2, \cdots, n_n\right)^t$である。

（2）式は

$$n = X\beta \qquad (4)$$

と書ける。行列 X の要素は非確率的変数値とする。ただし

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} \qquad (5)$$

$\varepsilon = Y - n$とおくと、仮定にもとづくモデルは

$$Y = X\beta + \varepsilon \qquad (6)$$

と書ける。Xとεは次の仮定を満たすものとする。

(a) $E(\varepsilon) = 0$
(b) $V(\varepsilon) = \sigma^2 I$
(c) rank$X$=p

Yを従属変数（応答変数）とよび、$x_1, \cdots, x_p$を独立変数（説明変数）とよぶ。βを回帰係数といい、εの要素を誤差項という。（6）式を確率変数Y_iが正規分布に従うとき、一般線形モデルと呼ぶ。モデルが線形であるというのは、「パラメータに関して線形」であり、「誤差項が加法的である」という意味である。

また確率変数Y_iが正規分布・二項分布・ポアソン分布を含む分布族：

$$f_Y(y; \theta_i, \varphi) = exp\left[\frac{\{y\theta_i - b(\theta_i)\}}{a_i(\varphi) + c(y, \varphi)}\right]$$

へ拡張されたものを一般化線形モデルと呼ぶ。[4]ここで、θ_iは正準母数であり、φはちらばりの母数である。多くの統計手法は、この一般化線形モデルを用いており、これを学習することで統計手法について関係性を持って理解することができる。

5.2 t 検定

t 検定は帰無仮説が正しいと仮定した場合に統計量が t 分布に従うことを利用した統計仮説検定法である。自由度kの t 分布は以下の式に表される t 確率変数の分布である。(4)

$$t = \frac{Z}{\sqrt{W/k}} \qquad (7)$$

Zは標準正規確率変数、Wを自由度kのx^2確率変数とする。さらにZとWは独立に分布している。

t 分布は原点に対し対象な分布であり、自由度が大きければ標準正規分布に近似できる。（図１）

$$P(\{t \le c\}) \approx P(\{Z \le c\}) \qquad (8)$$

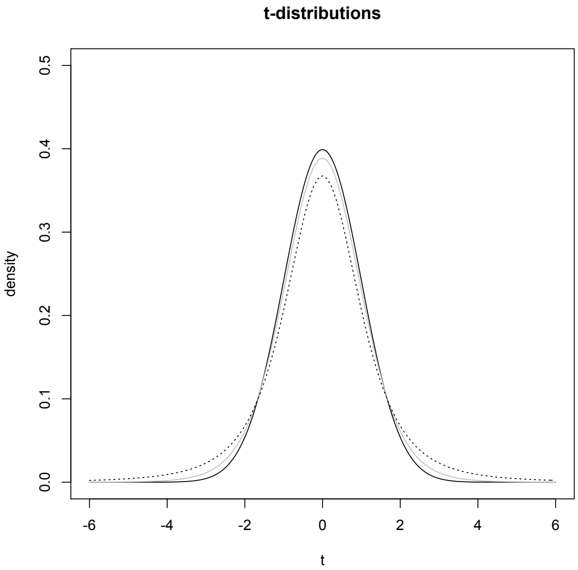

図 1 標準正規分布と t 分布[5]

t 検定の手順は、以下のようになる。

まず母集団の分布が平均μ、分散σ^2の正規分布であると仮定する。そのとき、標本統計量 t は自由度(n－1)の t 分布に従う。(3)

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \qquad (9)$$

ただし、

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \qquad (10)$$

ここで$\bar{X}$は標本平均であり、$n\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$に従って分布する。また$s^2$は検定の際に用いるデータの分散で不変分散という。ここから観測された標本平均$\bar{x}$と観測された標本不変分散s^2を（9）式に代入し検定統計量 t を求める。検定統計量 t について、

$$|t| > t_{\alpha/2}(n-1) \qquad (11)$$

のとき、危険率αで帰無仮説を棄却する。

6. t 検定を中心とした教育方法の検討

6.1 t 検定の教育方法

t 検定を学習する上で重要なのは、標準化と不偏分散について理解することである。

標準化とは平均$\bar{x}$、標準偏差sである統計量$\bar{X}$から平均０、標準偏差１である統計量Yに変換することであ

---

4 正規分布・二項分布・ポアソン分布などを含む分布族を指数型分布族と呼び、十分統計量を作る分布族として特徴づけられる。

5 図１は統計処理言語「R」を用いたものである。実線が標準正規分布、点線が自由度３の t 分布、灰色の線が自由度１０の t 分布を表しているグラフである。

る。（9）式の$(\bar{X}-\mu)$の分布は$n\left(0,\frac{\sigma^2}{n}\right)$であり、標準化すると

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad （１２）$$

となり、標準正規確率となる。

また不偏分散は（１０）式で表されたものである。統計量において母分散σ^2を用いず不偏分散s^2が用いられることを教育することで、（１２）式のσをｓに置き換えると、分布が標準正規分布からｔ分布に変わることが理解できる。この点についてはランダムデータを用い、実際に母集団から標本を抽出し分布を見ることで、標本のデータのばらつきが母集団のものより小さいことを感じてもらい、母分散を統計量の分散として用いることができないということを視覚的に理解させる。

6.2 ｔ検定から一般線形モデルへの発展

実際の教育におけるｔ検定から一般線形モデルへの発展においては、（9）式におけるｔ確率変数が（6）式におけるＹ確率変数で表されていることを理解し、ｔ分布が標準正規分布に近似することを理解することが重要であり、そのためには大数の法則を用いる必要である。（7）式の分母について、Wはk個の独立な確率変数の和であるから、kが大であればW/kは大数の法則により１に収束することがわかる。よって（8）式のｔ確率変数が標準正規分布に近似できることが理解でき、ｔ検定から一般線形モデルを学ぶことができる。大数の法則の理解については実際に統計ソフトによるシミュレーションを行い、大数の法則による収束の様子を理解させることで、収束の概念を教育する必要があると考える。

6.3 ｔ検定からその他の統計手法への発展

一般線形モデルを教育した事により、その他の統計手法を学習する際に、学習者は一般線形モデルを基に手法を関連させながら理解することが可能である。そのため、手法の手順そのものに大きな違いはなく、何が応答変数・説明変数になるのかという点でそれぞれの手法の違いを整理して理解することができる。また指数型分布族を理解することで、一般線形モデルから一般化線形モデルへの拡張も可能であり、教育する統計手法の幅を広げることも容易である。

さらに発展的な内容として、異なる２種以上の線形モデルを用いた統計手法を混合した手法を扱うことも可能になる。例として、回帰分析と分散分析を混合した手法を用いることがあげられる。これには制約と変数変換の学習が必要となってくるが、これにより個別の手法それぞれを用いるだけでは有意差を見いだせなかったデータから、有意差を見いだせる結果を導くことも可能となる。

6.4 ｔ検定から確率論への発展

学習者はｔ検定から一般線形モデルへの発展の際に、大数の法則についてシミュレーションを用いることで視覚的に収束する様子を理解した。ここから同じく極限定理である中心極限定理も、分布が収束していく様子をシミュレーション用いて見せることで、視覚的に理解できると考える。そしてこれらの収束の概念を理解し、一般化線形モデルに用いられる指数型分布族の二項分布を学習することで、ランダム・ウォーク、さらにはブラウン運動の学習へと発展させていくことが可能であると考える。

7. おわりに

本研究では、現在の統計・確率教育の問題点から、ｔ検定を中心とした教育方法の検討を行った。現在統計はより重要性を増してきており、統計に対する研究は進み、また様々な統計解析ソフトも発達してきている。しかしながら統計教育では理論と実践における乖離が学習者にとって負担となっている現状がある。本研究においては、理論と実践の総合的な理解、つまり統計と確率を総合的に理解することが重要であると考え、一つの例としてｔ検定を中心とした教育方法の提案を行った。また様々な統計手法を整理し理解できる一般線形モデルを教育することで、学習者はより統計・確率を理解しやすいと考える。

本研究では確率論においては大数の法則・中心極限定理に対する考察が主であり、より基礎的な部分である平均、密度関数といったものへどのようにつなげていくかという点が不十分であると考える。今後はどのようにｔ検定を生かした確率論の基礎教育を行うかかといった点を検討し、学習者は統計・確率を総合的に理解できるか、授業実践を通しさらなる検討を行っていきたい。

参考文献

(1) 竹内啓:“統計学大辞典”,東洋経済新報社（1989）

(2) 松原望：“入門確率過程”,東京図書（2011）

(3) 盛山和夫:“統計学入門”, 財団法人放送大学教育振興会（2004）.

(4) 森棟公夫：“統計学入門第２版”,新生社（2000）

(5) 田栗正章：“統計学とその応用”,財団法人放送大学教育振興会（2005）

(6) 松原望:“統計の考え方”, 団法人放送大学教育振興会（2003）.

(7) 佐伯胖・松原望：“実践としての統計学”,東京大学出版会（2000）