確率微分方程式における微分可能性の扱いについて

大野真司[*1]・竹内遥香[*2]・高藪学[*3]

Email: shinji.ono71@gmail.com

*1: 東京学芸大学教育学部総合社会システム専攻

*2: 東京学芸大学教育学部総合社会システム専攻

*3: 東京学芸大学

◎Key Words 確率微分方程式、シミュレーション、金融教育

1. はじめに

本研究は、株価過程を説明する確率微分方程式における微分可能性の扱いについての考察を行い、Black=Scholesモデルを始めとする金融派生証券を理解するための基礎を獲得することを目指す。

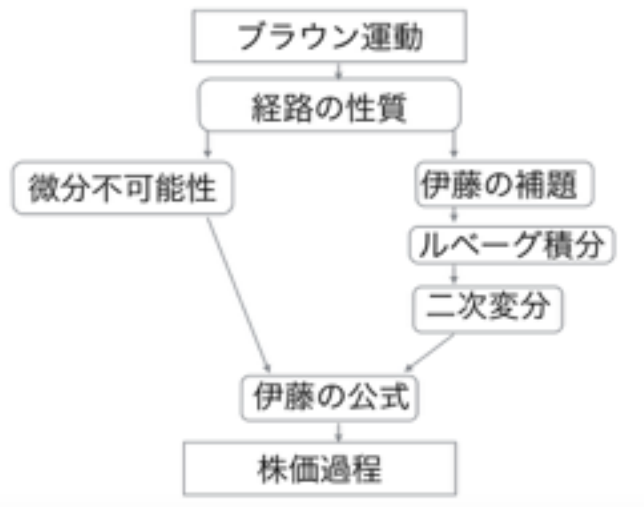
従来、幾何ブラウン運動などの至る所で微分不可能な曲線は、次の瞬間における変化を予測することが不可能であった。しかし、伊藤の補題により連続性が示され、リーマン積分からルベーグ積分へと積分の定義が拡張されたのに加え、ブラウン運動の経路がたどる二次変分有限という性質によって確率積分が可能になり、伊藤の公式の発明により確率微分方程式に変換し、計算することで株価過程の予測が可能になった。

近年では様々な金融解析のツールが発明されており、方程式自体が持つ意味を理解しなくとも数値を入力するだけで計算結果が得られるようになった。

しかし、株価過程の初学者にとっては、なぜ確率微分方程式を計算することで株価予測が可能になるのか理解に難しい。本研究ではそのことへの平易な理解を提示し、初学者への高いハードルを下げることを目的とする。本研究における教育的意義はここにある。

本研究では、株価過程を理解するために重要なルベーグ積分と二次変分に焦点を当て考察を行うことで、株価過程の理解が深まることが期待される。

2.1理解のプロセス



図A 理解のプロセス

図Aは、本研究における「確率微分方程式における微分可能性」の理解のプロセスを図示したものである。なお、図aに関しては、本研究における理

解のプロセスを視覚的に明示するために図示したものであり、一般的に必要な理解のプロセスではないことを言及しておく。

2.2　微分

本研究においては、ある関数のグラフ上の任意の点において接線の微分とは傾き(=微分係数)を求めることと定義する。また微分可能であるとは、定義域の各点において微分係数が存在すること、と定義する。よって幾何ブラウン運動は至る所で微分係数を求めることができないため微分不可能である言える。

2.3 ルベーグ積分

2.3.1ルベーグ積分とは

ルベーグ積分とは従来のリーマン積分の考えを拡張したものである。本研究においてはその特徴の中でも積分可能条件に着目する。従来のリーマン積分においては、積分可能条件は被積分関数の上積分と下積分が同じ値に収束することであった。一方、ルベーグ積分においては被積分関数の上積分のみ極限をとればよく下積分を考慮する必要はない。

またリーマン積分との重要な違いとして、ルベーグ積分は積分区間を必要しないという点が挙げられる。xy平面において、ある関数y=f(x)を積分する。リーマン積分では積分区間内を分割し、Δxをつくりf(x)Δxの形をつくることが必要であった。一方ルベーグ積分では関数の微小変化分をy軸方向から見るので積分区間を定める必要がない。この積分方法の発見により至る所で微分不可能な関数の積分が可能になった。

2.3.2ルベーグ積分と三角関数

三角関数は周期関数であるため、積分に規則性が現れる。この性質をルベーグ積分にも用いることができる。

2.3.3ルベーグ積分とフーリエ変換

多くの複雑な関数はフーリエ変換によって三角関数の項の足し合わせとして表すことができる。よって三角関数の周期性を用いて積分計算を行うことができる。

2.4 二次変分有限

2.4.1二次変分有限の考え方

ここでは標準ブラウン運動を扱う。B(t)の区間［0,t］に刻みを入れ、

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$$

と時間の分点をつくると、一次変分Vは、

$$V = \left|B(t_1) - B(t_0)\right| + \cdots + \left|B(t_n) - B(t_{n-1})\right|$$

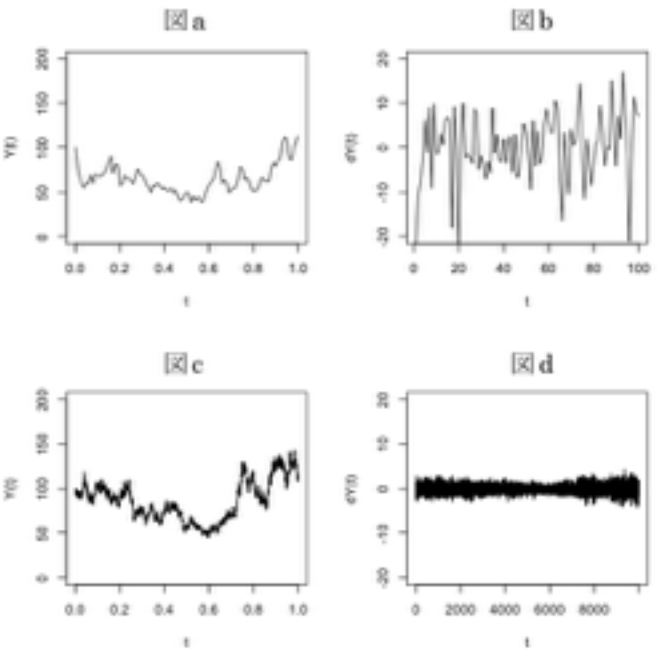
となる。一次変分は上昇・下降幅の合計を表しており、分点系について有界ではなく、無限に大きくなってしまう。しかし上昇・下降幅を２乗した二次変分Qは、

$$Q = \left|B(t_1) - B(t_0)\right|^2 + \cdots + \left|B(t_n) - B(t_{n-1})\right|^2$$

となり、有界なだけでなく、分点系の刻みを細かくすると定数tに二次の平均収束をする。これが二次変分有限と呼ばれる性質である。

2.4.2　二次変分有限とシミュレーション

下図a~dは、区間［0,t］をt=1として、分点系の細かさをn=100からn=10000まで増やしたときの幾何ブラウン運動と、そのシミュレーション結果の図である。(図aがn=100,図cがn=10000のときのμ=0, σ=0.1の幾何ブラウン運動、図b,dがそれぞれの変化分をプロットしたものである。)

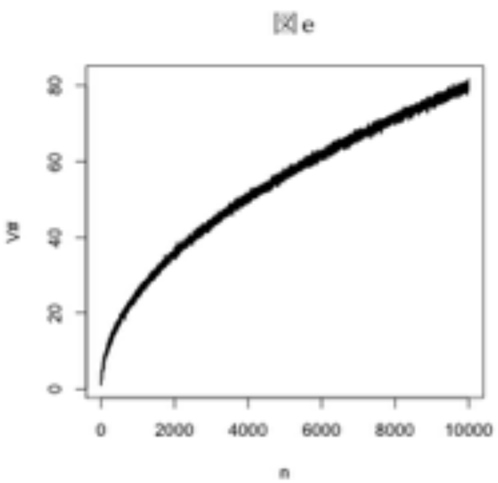


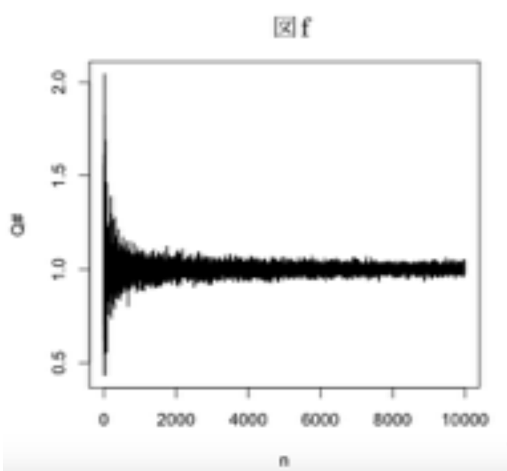
図a~d　幾何ブラウン運動のシミュレーション

（注1）

図a~dから分点系の分割を小さくする(分割の回数nを大きくする)と微小変化分は小さくなることがわかる。

下図e,fは分点系の細かさをn=1からn=10000まで1ずつ増やしたときの一次変分と二次変分のシミュレーションの図である。





(注2)

図e,fからはn→∞のときにVは発散し、Qはt(=1)に収束することがわかる。

4.3二次変分有限とルベーグ積分

二次変分有限の考えにおいて直感的な理解が得られにくい原因として、市販の教科書において「二次の平均収束をするため」といった解説や、確率の性質を用いた数式による証明が用いられる場合が多く視覚的なイメージを捉えることができないからである。そこでルベーグ積分を用いた直感的な解説を試みる。ではなぜQがtに収束について解説する。一次変分、二次変分はそれぞれ

$$V = \left|B(t_1) - B(t_0)\right| + \cdots + \left|B(t_n) - B(t_{n-1})\right|$$

$$Q = \left|B(t_1) - B(t_0)\right|^2 + \cdots + \left|B(t_n) - B(t_{n-1})\right|^2$$

と表すことができる。

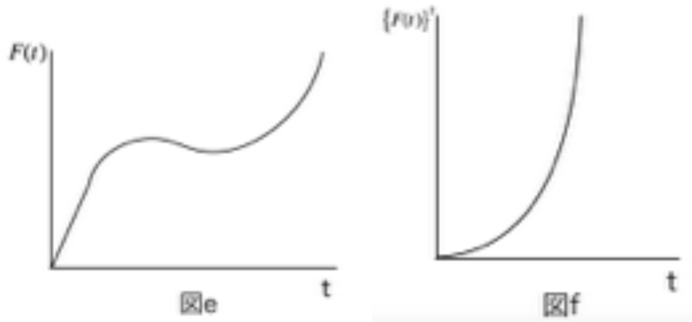
ここで、

$$F(t) = \left|X(t_n) - X(t_{n-1})\right|$$

とおくと、

VはF(t)の微小変化分の足し合わせ、Qは $\{F(t)\}^2$ の微小変化分の足し合わせとして考えることができる。簡略的にF(t)を下図gのように表すと、

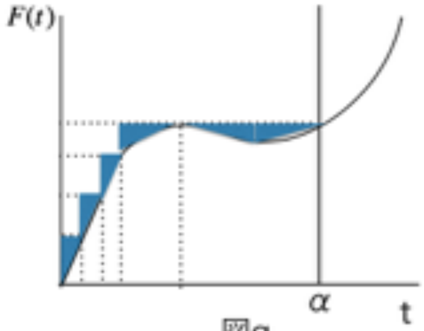
$\{F(t)\}^2$ はF(t)の２乗分なので、下図fのようになる。



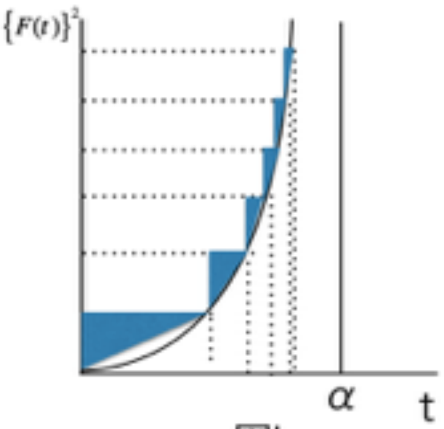
ここで、tの値をt=αと固定すると、

［0, α］におけるV,Qの意味は、F(t), $\{F(t)\}^2$

の変化分を［$0, \alpha$］においてそれぞれルベーグ積分したものに等しい。その様子を表したものが図g,hである。



図g



図h

図gより微小変化分が収束しないためVが発散すること、図hより微小変化分が収束するためQが収束することがわかる。

2.5. 伊藤の公式

gの各変数による１階、２階の偏微分

$$\frac{\partial g}{\partial t}, \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

が存在し、それらが連続であるという条件のもとで、

$$dY(s) = \frac{\partial g}{\partial s}(s, X(s))ds + \frac{\partial g}{\partial x}(s, X(s))dX(s)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X(s))(dX(s))^2$$

となる。ただし、$(dX(s))^2$ のところで、$(dX(s)) = ds$ の置き換えを用いる。

この公式は実質的には二変数関数のテイラー展開である。

伊藤の公式とは、微分不可能であったブラウン運動が、二次変分有限によって確率積分可能になり、微分可能な形に変換する際に用いられるものである。

3 おわりに

本研究では、確率微分方程式を理解する基礎となる「二次変分有限」の教授法をルベーグ積分を用いて提示した。株価過程理解の流れは図Aに示した通りであり、至る所で微分不可能な曲線を微分方程式で導くまで様々な要因があるが、最も重要な点はルベーグ積分にある。

発表当日は、株価データの平均、分散とルベーグ積分の関係性についても言及する。

参考文献

(1)森谷康平・横山監・高籔学(2013) 「株価過程に用いられる確率微分方程式の教授方法の検討」

(2)松原望(2003) 『入門確率過程』東京書籍

(3)志賀徳造(2000)『ルベーグ積分から確率論』共立出版

(4)森真(2012)『入門　確率解析とルベーグ積分』東京図書

注1 ,注2

ともに出典は、森谷康平・横山監・高籔学(2013) 「株価過　程に用いられる確率微分方程式の教授方法の検討」