

# 行基本変形学習支援システムの改良

田中円\*1・樋口三郎\*2

\*1Email: t16m005@mail.ryukoku.ac.jp

\*1: 龍谷大学大学院 理工学研究科

\*2: 龍谷大学 理工学部

◎Key Words 線形代数, 行基本変形, 学習支援システム

## 1. はじめに

大学数学において線形代数は重要な分野であり、eラーニングを用いて学習支援を行う研究は多くある。例えば、岸田ら<sup>(1)</sup>は大学生の線形代数学学習を支援するWebシステムを開発した。また、中村<sup>(2)</sup>は行列の数学オンラインテストをMoodleとSTACKで行えることを示した。

線形代数において、行基本変形という操作があり、連立方程式を解くなど、様々な用途で用いられる。しかし、この操作を紙で行った場合、計算量が多いことから、単純な計算の誤りが多発し、学習者の本質的な理解を妨げ、学習意欲を削ぐという問題がある。そこで、池田<sup>(3)</sup>のシステムを元に、Webページ上で行列を操作し、行基本変形を行うことができるシステムを作成した<sup>(4)</sup>。

本システムの目的は、行基本変形をWebページ上で行うことで、紙で計算するよりも円滑かつ確実なものとし、学習を支援するものである。また、学習データを記録し、学習者がどのような計算過程を踏んでいるのかを判定することである。今回は新たに2つの機能を追加し、どのように機能が用いられたのかを実験を行い、検証した。

## 2. システムの概要

本システムはWebブラウザ上で動作するものであり、入力ページと計算ページで2つのページで構成される。

### 2.1 入力ページ

入力ページは、行列のサイズと、学習者の学籍番号を入力するページである。入力すると計算ページが開かれる。

### 2.2 計算ページ

計算ページ(図1)は、行列の成分の値を分子と分母の値を入力し、有理数として計算を行うページである。計算ページでは、行列の各行に対して4つの操作が可能であり、以下の様になっている。

- ある行に別の行の有理数倍を加える
- ある行に別の行の有理数倍を引く
- 行を入れ替える
- ある行を0でない有理数倍する

ここで、1回の操作を1ステップとする。

今回、計算ページに以下の2つの機能を追加した。

1. ヒント機能
2. Undo機能

以下では2つの機能を説明する。

### 2.3 ヒント機能

ガウスの消去法を行う際、学習者が「ヒント」ボタンを押すことで現在の行列に対してどのような操作をとるべきかを、以下の4種類のメッセージで提示し、被験者が行列の操作に困った時、足場かけを行うことを意図している。なお、内容については後述する。

- 前進消去しなさい
- 後退消去しなさい
- 入れ替えをしなさい
- いい感じやん

### 2.4 Undo機能

学習者が、「元に戻す」ボタンを押すことで、現在表示されている行列を、1回操作をする前の状態の行列に戻す。また、何度も使用して初期の行列の状態まで戻ることが可能である。行基本変形でも同じ操作が可能だが、Undo機能を用いることで学習者が操作ミスをした前の状態の行列に戻すことを容易にさせ、教員にとって学習者の操作の検出を容易にすることを意図している。

行列の行基本変形支援Webアプリケーション

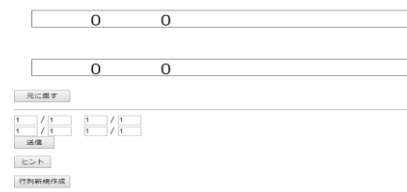


図1 計算ページ

## 3. 実験

今回は本システムを用いて、ある有理数を成分とする行列をガウスの消去法によって、簡約化行列に変形させるテストを被験者に受験させた。ここではまず、ガウスの消去法と簡約化行列について説明する。

### 3.1 ガウスの消去法

ガウスの消去法は、行基本変形を繰り返し、先述の前進消去及び後退消去を行列に対して行うことである。行基本変形については<sup>(4)</sup>及び松本<sup>(5)</sup>を参照されたい。前進消去とは、行列において基点となる成分(ここではピボットと呼ぶこととする)を選び、そのピボットより下の成分が0になるよう行基本変形を行うことである。また、ピボットは各行に多くても1つしか存在せず、値が0のものを選択してはならない。

後退消去とは、前進消去が終了した後、ピボットが存在する一番下の行からピボットより上の成分が0と

なるように行基本変形を行うことである。この一連の操作をガウスの消去法と呼ぶ。

### 3.2 簡約化行列

ガウスの消去法を行うことで得られる行列は一意に定まる。この操作で得られた行列を簡約化行列と呼ぶ。

ヒントの内、「前進消去しなさい」「後退消去しなさい」は、現在の行列が先述の前進消去または後退消去をするべき時に出力され、現在の行列が簡約化行列まで変形されているとき「いい感じやん」が出力される。ただし、ピボットの値が1でなくとも「いい感じやん」が出力される。

### 3.3 実験内容

実験内容としては、まず、紙面により線形代数の行基本変形及び簡約階段行列の復習を行い、本システムの操作方法を紙面で確認させた。その後、実際のシステムを用いて操作練習を行い、本番問題に移ってもらった。図3が操作練習問題、図4が本番問題である。

行列の入力練習

問1 以下の行列をガウスの消去法を用いて簡約化行列に変形させよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

なお、操作を間違えた場合は、「元に戻す」ボタンを活用してください。

図2 操作練習問題

行列の本番問題

問1 以下の行列をガウスの消去法を用いて簡約化行列に変形させよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 13 \\ -1 & 5 & 18 & 38 \end{pmatrix}$$

問2 以下の行列をガウスの消去法を用いて簡約化行列に変形させよ

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 15 \\ 4 & 6 & 3 & 41 \\ 8 & 8 & 9 & 83 \\ 2 & 3 & 3 & 25 \end{pmatrix}$$

問3 以下の行列をガウスの消去法を用いて簡約化行列に変形させよ。

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & -6 & -24 \\ 6 & 8 & -13 & -60 \\ 2 & 2 & -3 & -12 \\ -4 & -3 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

なお、全ての問題において、操作を間違えた場合は、「元に戻す」ボタンを活用してください。

図3 本番問題

### 3.4 実験結果

今回、龍谷大学理工学部数理情報学科の4回生(N=7)を被験者として実験問題を行った。本番問題において6人が全問簡約化行列に到達し、1人のみ1問だけ簡約化行列に到達できず、また、問1と問2に対して、共通の3名の被験者がガウスの消去法を行っていなかった。

ここで、平均ステップ数を表1、平均Undo使用回数の結果を表2で表す。また、ガウスの消去法を行ったグループ(N=4)(表ではガウス○とする)と行わなかったグループ(N=3)(表ではガウス×とする)を分け表にまとめた。

表1 グループ別平均ステップ数

	平均(回)	標準偏差
ガウス○問1 ステップ数	9.5	5.0
ガウス×問1 ステップ数	9.3	2.5
ガウス○問2 ステップ数	13.8	2.5
ガウス×問2 ステップ数	13.7	4.6

表2 グループ別平均Undo回数

	平均(回)	標準偏差
ガウス○問1 Undo回数	2.0	2.9
ガウス×問1 Undo回数	1.7	1.2
ガウス○問2 Undo回数	0.5	0.9
ガウス×問2 Undo回数	1.3	1.9

ステップ数にはUndoの使用もカウントされており、Undoを使用することで必然的にステップ数は増加する。問1において平均Undo回数が多く、標準偏差も大きいため、平均ステップ回数の標準偏差が大きくなっている。これは、問題が1問目であり、動作確認のために機能を使ったのではと推測される。

また被験者の計算過程からUndoの使用理由として、行基本変形の行の選択を誤ったためという意図通りのものがあつた一方、動作確認のために使用した、行基本変形においてピボットの値が0になってしまったなど、意図していない使用理由が推測される。

またヒントだが、本番問題においてほとんど意図された形で使用されなかった。ヒントは現在の行列にどのような操作をするべきかのアドバイスを得るものだが、前進消去、後退消去、入れ替えが出力された履歴はほとんど見られなかった。「いい感じやん」が出力された履歴が多くあり、出力されたタイミングは被験者が行列の最後の操作を終えた直後ばかりであった。ヒントはガウスの消去法を終了して解を提出すべきかを知るために使われたと推測される。また、テスト後にヒント機能とUndo機能は適切だったかを4段階でアンケートを行った結果、平均値が3.3、3.8であり、おおむね評価は高かった。

### 4. おわりに

今回、システムに新たに2つの機能を実装し、実験を行った。データベースから被験者がUndo機能及びヒント機能を使用していたことがわかり、テスト後に行ったアンケートからも2つの機能の評価は高かった。しかし、全てが意図した形で使われたわけではなかった。Undo機能は意図した形で使われたものもあつたが、ヒント機能は、ほとんどがガウスの消去法が完了した後に使用しており、行列の操作に困った被験者が使用した履歴は見られなかった。

### 参考文献

- (1) 岸田隆, et al. “線形代数の概念的な理解における仮説検証型教育システムの効果 (1)”, 日本教育心理学会総会発表論文集 46 (2004): 186.
- (2) 中村泰之, 秋山實: “STACK と Moodle による数学 eラーニング”, 数理解析研究所講究録 1735 (2011): 9-15.
- (3) 池田政裕: “行列の行基本変形支援webアプリケーション”, 龍谷大学理工学部数理情報学科 2015 年度卒業論文, (2015)
- (4) 田中円, 樋口三郎: “線形代数における行基本変形学習支援システム”, 教育システム情報学会関西支部学生研究発表会, (2017)69-70
- (5) 松本和一郎: “線形代数入門 理論と計算法 徹底ガイド”, 共立出版(2007)