

円周率の値や収束状況を体現できる算数補助教材の製作

藤井 康寿*

Email: fujii@tokaigakuin-u.ac.jp

*: 東海学院大学人間関係学部子ども発達学科

◎Key Words 円周率の値, モンテカルロ法, 算数補助教材, Scratch

1. はじめに

1.1 円周率の値を教える小学校学習指導要領の限界

文部科学省 HP サイトで閲覧可能な学習指導要領に関する Q&A では、児童に円周率の値は次のように教えるよう助言している。具体的には「円周率については、3.14 と教えるだけでなく、それが本当は 3.1415... とどこまでも続く数で、3.14 も概数にすぎないということを正確に教える。」とある^[1]。一方、小学校学習指導要領解説算数編においては、小学校第 5 学年で習う「平面図形の性質」の内容取り扱いは、「3.14 を円周率として用いる。」と規定している。同解説では円周率の値は、円に内接する（あるいは外接する）多角形の外周の長さを円の直径の長さで割ることによって求められる。具体的には、Fig.1 に示す円に内接する正六角形と円に外接する正方形を描いてそれぞれの周の長さを求める。円周率の値はそれぞれの周の長さを円の直径の長さで割ることによって求められ、内接する正六角形の周りの長さは直径の 3 倍で、外接する正方形の場合の周りの長さは直径の 4 倍となる。円は内接する正六角形と外接する正方形の間にあり、円周率の値がこれらの図形の範囲にあることは推定できる。しかし、上述の学習指導要領及び同解説に明記されている 3.14 を想起させるには必要十分な説明であるとは言い難い。

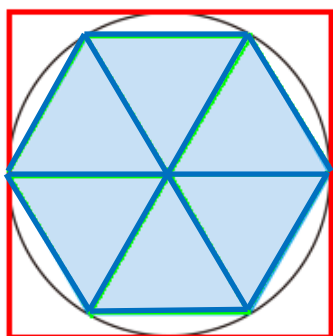


Fig.1 円に外接する正方形と内接する正六角形
[(直径) × 3 < 円周率の値 < (直径) × 4]

1.2 円周率の値や収束状況を体現できる補助教材の製作を行うに至った理由

円周率の値は円周の直径に対する割合で求められ 3.14 の概算値である。この値を導く方法は古来より考案されており後述の第 2 章で紹介する。しかし、1.1 節の小学校指導要領に記述されている内容では、教員が授業で円周率の値 3.14 を実証することは困難であると推察される。現行の指導要領の記載内容では不十分で

あり、円周率の値を想起させる補助教材を用いた授業展開が疑問点解決の一助となり得ると考えた。

教材開発の重要性に関して、長谷川^[2]は次のように述べている。「教材」は、学習者および教員の双方にとって最も重要な教育資源の一つであるにも関わらず、例えば、算数の授業においては公式や定理などを暗記して、素早く問題が解けることを評価する傾向にあると指摘している。一方で、中央教育審議会は「いかに社会が変化しようとして、自分で課題を見つけ、自ら学び、自ら考え、主体的に判断し、行動し、よりよく問題を解決する資質や能力」を高めていくことが重要な課題であると答申している。単なる解法の当てはめや正解を得るだけの学びではなく、「学び方を学ぶ」ことができる教材や学習者の「なぜ」に答え得る教材を提供することが求められているのである。以上の指摘から、教員が教科の単元内容を深く理解して、既存の教材の改良や教材研究を行うことが必要である。その結果、教員力の向上が図れると同時に、学ぶ立場の学習者は教員の助言を通して真理の探究に誘われることになる。

2. 従来の円周率の計算法とその特性

本章では円周率の値を求めるために考案された計算法を 2, 3 例紹介する。また、2.1 節において本論で採用したモンテカルロ法について概説する。

円周率とは任意の円周の長さをその円の直径の長さで割った数である。円周率の値を求める方法として、次の方法が考案されている。

円に内接する正 n 角形を考え、正 n 角形の外周の長さを円の直径で割った数は、 n が大きくなるにつれて円周率の値に近づいて値が求められる方法である。別の方法として、逆正接関数($\arctan(x)$)をテーラー展開して、多項式近似して有限項で式の値を求める方法である。さらに別解法として、数列と漸化式による反復計算で円周率の値を求める方法（ガウス・ルジャンドルの反復計算）である。これらの円周率の値を求めるために考案された方法は一長一短である。すなわち、最初の解法は古典手法であって、次の方法と同じように円周率の値の収束状況は良くない。三つ目の方法は計算手順が単純であって、その上、計算効率が良好で真値へ収束することが知られている。しかし、理論の背景が複雑であるので、導出された数列と漸化式は円周率の値を求めるのみに活用されているため教えることは困難である。

上述の解析法は先人の優れた英知の結晶であるが、高尚な理論や計算式で導かれた方法であるため、小学

校の教材として活用して児童に教えるには困難であると言わざるを得ない。以上の理由から、本研究では次節で説明するモンテカルロ法による円周率の値を求める補助教材の製作を行うことにした。

2.1 モンテカルロ法を用いた円周率の近似値計算

モンテカルロ法とは乱数を用いて物理量を推定する方法である。乱数を用いるため、解を正しく出力することもあれば、大きく外れることもありランダムな挙動をする。

モンテカルロ法を用いた円周率の近似値は次のアルゴリズムで計算できる。

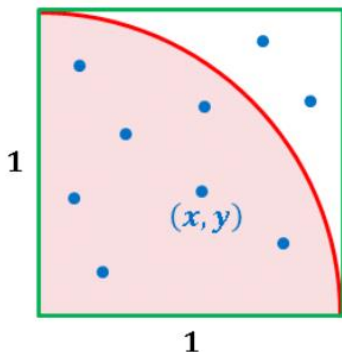


Fig.2 正方形と内接する四分円

Fig.2 に示すように 1×1 の正方形内にランダムに点を打つ。原点 (左下の頂点) から点までの距離は、 x と y 座標から求める。四分円は原点からの距離が 1 の集まりである。距離が 1 以下なら 1 ポイント加え、1 より大きい場合が 0 ポイントとして数える。ランダムに点を打ち続けると、四分円は点で埋め尽くされる。ランダムに打ち続ける回数を N 、四分円内に点が打たれてポイント 1 が加算されて総獲得ポイントを X とするとき、正方形内の操作回数 N と、四分円内の総獲得ポイント X の比は、面積の比に近似する。すなわち、 1 (正方形の面積) : $\pi/4$ (四分円の面積) = N (正方形内の点の数) : X (四分円内の点の数) より、 $\pi = 4X/N$ の計算が円周率の近似値を与える。ここで、 π 記号は円周率を表す。例えば、Fig.2 の円周率 π の近似値は、 N は 9、 X は 7 となり、 $4 \times 7/9 \approx 3.11$ として求められる。

以上のアルゴリズムから円周率の近似値が求められるのであるが、ランダムに打ち続ける回数 N を増やせば近似値の精度が上がるのが知られている。では N を何回にすれば、円周率 3.14 の概算へ近似できるのかを求めておく必要がある。文献 3 によると、数学を用いて解析した結果、誤差約 1% の以内の精度に収めるには $N \approx 1.1 \times 10^6$ 回要すると報告されている。

これらの報告から、約 10 万回点を打って円周率の近似値を得ることは困難であるので、モンテカルロ法で解析する場合、コンピュータ内でランダムに点を生成させてシミュレーションすることが一般的である。このように四分円の内外で点の数を数えて円周率の近似値を得るのであるが、目標値に近づけるために膨大な回数の試行を必要とする。本研究では第 3 章で述べる新しい方法を考案して膨大な試行回数の回避を行った。

2.2 モンテカルロ法を用いた先行研究について

富野ら^[4]は、円周率 π について 2 つの観点で実践報告している。一つは円に内接する無限多角形から円周率 π の値を求める方法であり、もう一つはモンテカルロ法による方法である。中学校の生徒を対象として、予め用意しておいたプログラムを実演することで実践報告した。論文では円周率の値が 3.14 に収束する状況を、コンピュータでシミュレーション観察することで、体験的に理解できたと報告している。報告は、予め作成されたプログラムを起動してディスプレイ上に無数の多角形が自動で描画される様子や、正方形の枠内に次々に打点される様子を観察することである。結果として、円周率 3.14 の収束状況が把握できたと報告されている。しかし、富野らの論文は、紹介したプログラミング言語に生徒が興味や関心を持ち得た結果に重点が置かれており、円周率の本質と特性を把握する学習効果に関する報告はなかった。

3. 本研究で改良したアイデア

3.1 おもちゃの太鼓を叩いて点を打つという発想

2.2 節で先行研究の成果に関して指摘したように、不明な点が学習者によって明らかになる事柄や、試行作業を通じた発見や気づきは、主体的な学習を育むと言える。本論ではモンテカルロ法で従来コンピュータが担っていた作業を、学習者自らで行うことができる教材装置を考案した。

具体的には、円の内外に点を打つ作業をおもちゃの太鼓を学習者がバチで叩くことで実現する。太鼓は分解して中に予めミニマイクを設置しておく。バチで叩く強さを、中に設置したミニマイクで音を拾って数値に変換する。数値化した音のボリュームは最大値 100 であるので、得られた値を 1 倍～100 倍に増幅して点を打つことができるようにした。以上の操作で試行回数が確保されて精度が保証される。換言すれば、バチで太鼓を叩くと内蔵したマイクで音を拾って音の強弱を数値に変換する。変換された数値で打点する数が決まる仕組みである。

3.2 従来の研究方法との相違点

学習者はおもちゃの太鼓をバチで強く叩いたり、弱く叩くことで正方形および内接する円内に打点されていく状況を直視できる。太鼓をバチで叩く試行が円周率の値を求めることに繋がるのである。このように従来の方法とは異なり、学習者自らの手で主体的に実践することを通して真理の探究ができるのである。

3.3 教員が準備する教材と教える内容

必要な教具は 100 円ショップで購入することができるおもちゃの太鼓とマイク代わりの小型スピーカーである。太鼓の中に小型スピーカーを設置することで準備が完了する (Fig.3 参照)。

円周率の求め方については 2.1 節で詳述したように、モンテカルロ法によるランダムな打点と、打たれた点をカウントして算定式に代入して求められることを説明する。教員は学習者がおもちゃの太鼓を叩いて点が打たれることで円周率が求められていく様子を一緒に

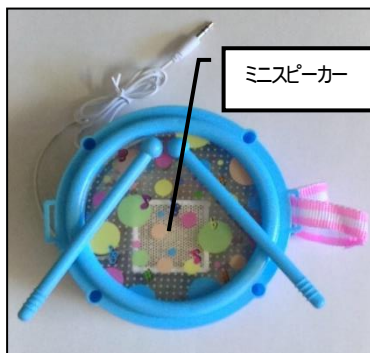


Fig.3 ミニスピーカーを内蔵したおもちゃの太鼓

観察するのみである。ただし、実践後の振り返りのために、学習者の発見した事柄や感想をメモして残しておくことは必要である。

4. 教材製作で用いたプログラミング言語

本章では円周率の値や収束状況を体現できる補助教材を製作するための要件を以下にまとめた。要件を整理した上で教材製作に活用したプログラム言語について理由を述べる。

①モンテカルロ法を用いて円周率の近似値を求めるにおいて乱数を発生する関数を有していること。

②正方形や円の図形の作図が容易であり、図形上に点をランダムにプロットできること。

③打点された点の数をカウントできて、円周率の値と打点数の関係を逐次プロットしてグラフ化できること。

項目①～③の要件を満たす教材を製作するためのプログラミング言語はほとんどの言語で実現可能である。しかし、3.1節で示した要件が実現できて体験的な学習教材を製作できる言語はほとんど見当たらず、Scratch^[5]が対応可能であることが分った。Scratch は多くの書籍で出版されており説明は割愛するが、本研究で提案するアイデアが実現可能となったコマンドを有する。すなわち、Fig.4 に示す「音量」スクリプトの活用である。



Fig.4 「音量」スクリプト

Fig.4 に示す「音量」スクリプトは、Scratch の「調べる」というカテゴリの中にあり、次の要件を満たすことで機能する。すなわち、スクリプトを使用するにはマイクを使用する必要があるが、マイクがない場合は、イヤホン（あるいはスピーカー）でも機能する。スピーカーがマイクの代用となり得ることが判ったので、Fig.3 に示すようにおもちゃの太鼓の中にミニスピーカーを設置して太鼓の音を拾う仕組みが考案できたのである。「音量」スクリプトは、マイク（あるいはミニスピーカー）が受信する音の大きさを0～100の数値として変換することができる。

4.1 学習者がバチで太鼓を叩いて打点する方法について

太鼓を叩くと、Fig.4 に示す音量ブロックが音の大きさを0～100の数値に変換する。後述の第5章の開発結果に見られるように、太鼓の画像から叩いた強さに応じて数値分だけボールが出て正方形図形（あるいは内接する円）の的にランダムに飛んで打点する。ボールがランダムに飛んで打点するには、Scratch の演習スクリプトのカテゴリの中に「○から○までの乱数」が用意されているので活用した（Fig.5 参照）。なお、乱数の数値（打点する範囲）は正方形図形の輪郭を描く座標範囲を指定した。このとき、内接円内の打点数と総打点数もカウントする。以後、学習者がおもちゃのバチで太鼓を叩く行為を繰り返すことで内接円内はランダムに打点された点で充填されると、円周率の近似値に限りなく収束していく状況を観察できるのである。



Fig.5 乱数発生スクリプト

5. 補助教材の製作結果

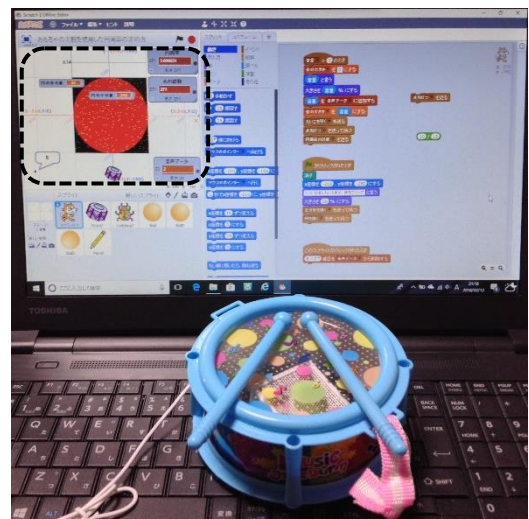


Fig.6 Scratch 起動画面



Fig.7 Scratch 画面拡大図（実行画面）

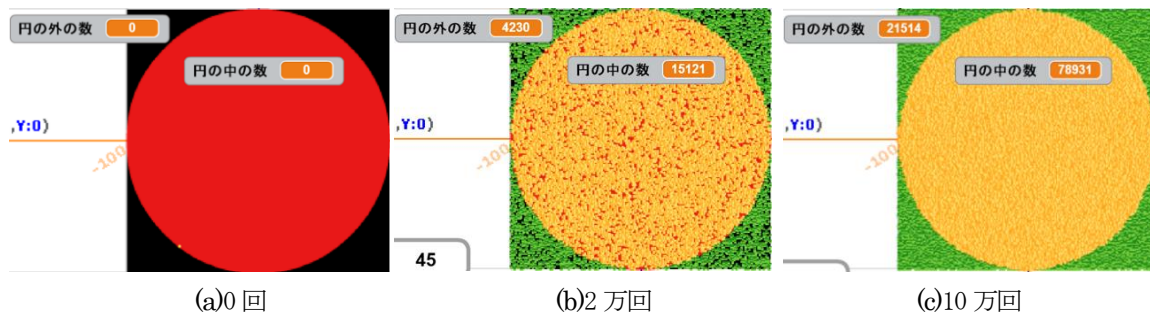
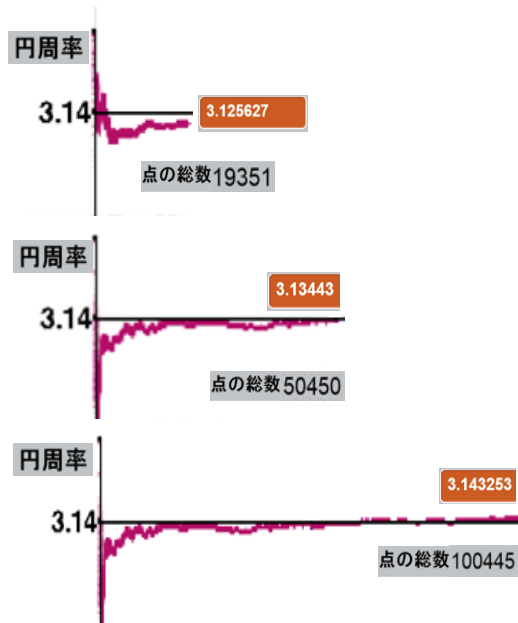


Fig.8 打点回数に応じた変化の様子

Fig.9 円周率の収束状況
(上から約2万回, 5万回, 10万回打点)

第3章で説明した太鼓内に設置したミニスピーカのケーブルをノートパソコン(以降PCと呼称する)のマイク端子に差し込んだのちScratch2.0を起動する。Scratch2.0にはインターネット上に自作プログラムを公開可能なオンライン版^[5]もあるが、教室での活用を想定してオフライン版を用いて教材を開発した。Fig.6は起動直後の画面である。また、Fig.7はFig.6の破線で囲んだ実行画面の拡大図である。

図中の項目iii)はFig.6のおもちゃの太鼓と連動して動作する。太鼓をバチで叩くと図中の太鼓のイラストが変形すると同時に、第4章で詳述した音量スクリプトが作動して、図中の「音声データ」に叩いた強さが音の数値として表示される。音の数値と連動してイラストの太鼓から球が発射される。球は図中に描かれた正方形とそれに内接する円の方向に音データの数値分が発射される。発射された球は、正方形の座標範囲内にランダムに打点される(4.1節参照)。

同時に、Fig.7の項目ii)は、ランダムに発射された球が正方形および正方形に内接する円に打点されていく様子が観察できる領域である。具体的には、「円の外の数」は正方形と円の間で打点された数を表示し、「円の中の数」は円内に打点された数がカウントされる。また、右側の「点の総数」は合計である。その他に打点されていく状況を視覚的に認識できるよう色を付け

て表示した(Fig.8(a)~(c)参照)。視覚効果の追加によって、学習者は太鼓を叩くことと連動して打点される状況が直視できるのである。

また、項目i)には、太鼓を叩くことでカウントされる円内外のそれぞれの打点数と総打点数から、2.1節の円周率の算定式で得られた値が表示される。項目iv)には項目i)と連動して打点数に応じた円周率の値がグラフで描画表示される(Fig.9参照)。

6. おわりに

本研究では円周率の値を教える小学校学習指導要領の限界を指摘して、文献2を引用しながら、主体的な学びと教材の重要性を述べた。モンテカルロ法を用いて円周率の値を求める先行研究は、Scratchプログラムの活用に主眼を置いたものであって、円周率の本質や特性の理解は困難であることを指摘した。本研究はモンテカルロ法を用いたことは先行研究と同じであるが、学習者の主体的な学びと真理の探究に配慮した補助教材の製作を行った。具体的には、教員においては、廉価な玩具で容易に教材が製作できて、教える内容もわり算とかけ算で構成される算定式を学習者に説明するのみである。学習者は教員の説明を聞いたのち、製作された補助教材を自らの手で操作することで、探究しながら実践学習することができる。また、大画面やプロジェクタに投影することで、生徒全員が参加できて、学習の進捗状況を共有しながら把握することができる。

最後に、教員は、生徒全員が以下に挙げる気づきを共有できるよう問い掛けすることが大切である。すなわち、「①円の中を点で埋めるには太鼓を非常に多く叩かなければならないこと。②叩く数が少なければ、円周率の値は一定とならずバラバラな値を取る。③一生懸命に太鼓を叩けば、点で隙間が埋め尽くされて円周率3.14の概算値に収束する様子を発見できること。④円周率の値は3.14の一定値でなく無限に値が続くことが理解できること。」である。

参考文献

- [1] 新しい学習指導要領についてのQ&A, 文部科学省サイト, http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/youryou/111/020101a.htm
- [2] 長谷川勝久:算数科教育概論, p.123, ふくろう出版, 2003.
- [3] モンテカルロ法と円周率の近似計算, <https://mathtrain.jp/montecarlo>
- [4] 富野友里恵, 高藪学, 田川貴章: Scratchによる π と無限の学習, pp.171-174, PC Conference 論文集, 2009.
- [5] Scratch, URL: <https://scratch.mit.edu/>