整数論計算ソフト MAGMA を用いたヘロン三角形の研究

新庄 慶基[*1]・田中 仁[*2]・寺井 伸浩[*3]
Email: v18f2001@oita-u.ac.jp

*1: 大分大学大学院工学研究科博士後期課程工学専攻環境工学コース
*2: 大分大学大学院工学研究科博士前期課程工学専攻知能情報システム工学コース
*3: 大分大学理工学部

◎Key Words 三角形，整数論，MAGMA

1. はじめに

本稿は、整数論計算ソフト MAGMA を用いた三角形に関する研究である。著者らはピタゴラス数やヘロン数と呼ばれる三角形に関する数についての整数論的な研究を行っている。研究には整数論計算ソフト MAGMA を用いて得られた数々の数値例を紹介し、そこで得られた主結果 (数学的証明や予想) について紹介する。

2. 整数論計算ソフト MAGMA

まず、本研究で用いる整数論計算ソフト MAGMA について紹介しておく。MAGMA とは、オーストラリアシドニー大学数学統計科の計算機代数グループにより開発と公開が行われている。主に，代数学や代数幾何学，数論における計算ソフトである。

2.1 無料版 MAGMA

MAGMA は以下のサイト URL より、無料版を誰もが利用することができる。

http://magma.maths.usyd.edu.au/calc/

上記の URL からこのような画面が出てきたら中央部分の白い四角の枠内にプログラムを記述していき、「Submit」のボタンを押すことでプログラムの実行結果が下に表示される。この MAGMA にプログラムを記述するには、MAGMA 専用のプログラミング言語が必要であるが、本サイト内の「Documentation」から「Handbook」があるので、そこから、求めたい計算に応じた関数を検索することで、MAGMA のプログラム記述方法が分かる。以下、無料版 MAGMA の画面について図 1 に示しておく。

図 1 無料版 MAGMA の実行画面

2.2 有料版 MAGMA

無料版でもある程度の計算を行うことはできるが、実際に整数論周辺の研究をしていくと、膨大な桁数を扱うことも多く、無料版だと思うような結果が得られないことが多々ある。実際、無料版 MAGMA には計算時間に制限があり、120 秒までの数値実験しか行うことができない。そういうニーズがあれば、製品版 MAGMA を購入することで自らのパソコン上で無限に計算を行ってくれる。有料版 MAGMA の金額は 1 アカウント約 10 万円であるが、Windows や UNIX 系のパソコンにも使用できる。以下、有料版 MAGMA の画面について図 2 に示しておく。

図 2 有料版 MAGMA の実行画面

3. ピタゴラス三角形

ピタゴラス三角形とここでは呼んでいるが、我々が中学校の数学の教育課程において学習する「三平方の定理」という名前で知られる「ピタゴラスの定理」からなる三角形のことである。以下、図 3 にピタゴラス三角形の図形を載せておく。

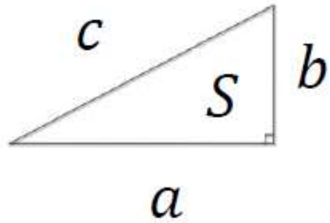

図 3 ピタゴラス三角形

3.1 ピタゴラスの定理

ピタゴラスの定理は「直角三角形の直角を挟む 2 辺の長さをa、b、斜辺の長さをcとするとき、$a^2+b^2=c^2$が成り立つ」ことであり、図形的に重要な誰もが知っている有名な定理である。

3.2　ピタゴラス数

ピタゴラスの定理を満たす、正の整数（自然数）a、b、cをピタゴラス数という。また、$\mathrm{GCD}(a,b,c)=1$、つまり、a、b、cが1以外の公約数を持たないとき、正の整数a、b、cを原始ピタゴラス数という。以下、表1に原始ピタゴラス数の数値例を載せておく。

表1　原始ピタゴラス数の例

a	b	c
3	4	5
5	12	13
7	24	25
9	40	41
11	60	61
13	84	85
15	8	17
15	112	113
17	144	145
19	180	181
21	20	29
21	220	221

3.3　原始ピタゴラス数の解の“tree”構造

任意の原始ピタゴラス数は、ある3つの異なる3次正方行列を用いて表わされる。それらの3つの行列については以下の図4に示す。

$$A=\begin{pmatrix}-1&2&2\\-2&1&2\\-2&2&3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-1&2\\2&-2&3\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&3\end{pmatrix}$$

図4　原始ピタゴラス数を無数に生成する3次正方行列

実際の計算は、MAGMAを用いてプログラムを実行することで無数に原始ピタゴラス数が得られる。このことは「Hallの定理」として知られている。この定理より、原始ピタゴラス数の解の構造が、“tree”となっていることも分かる。この解の構造について、ある規則に沿った選び方をすることで面白い性質を導ける。原始ピタゴラス数の解の“tree”構造について、例を以下の図5に示す。

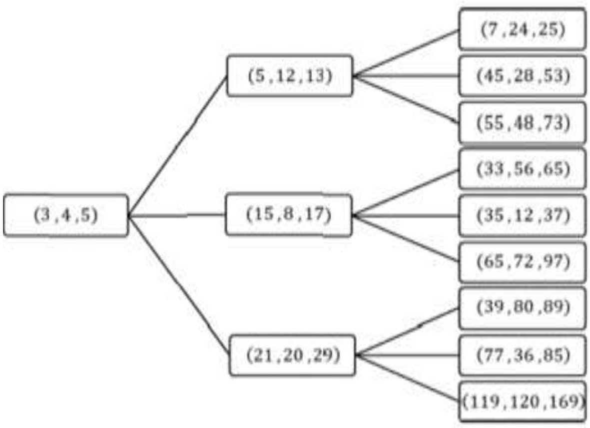

図5　原始ピタゴラス数の解の“tree”構造

3.4　$b_n-a_n=(-1)^n$ となる原始ピタゴラス数

原始ピタゴラス数の解の“tree”構造において、最小のピタゴラス数$(3,4,5)$に、Hallの定理におけるCの行列を繰り返し掛けることにより、$b_n-a_n=(-1)^n$の関係式が得られる。この関係式は後述する$\sqrt{2}$の近似で必要となる。以下、表2に数値例を載せておく。

表2　$b_n-a_n=(-1)^n$となる原始ピタゴラス数の例

a	b	c
3	4	5
21	20	29
119	120	169
697	696	985
4059	4060	5741
23661	23660	33461
137903	137904	195025
803761	803760	1136689
4684659	4684660	6625109
27304197	27304196	38613965

3.5　$2a_n-c_n=1$となる原始ピタゴラス数

3.4と同様に、原始ピタゴラス数の解の“tree”構造において、最小のピタゴラス数$(3,4,5)$に、Hallの定理におけるABの行列を繰り返し掛けることにより、$2a_n-c_n=1$の関係式が得られる。この関係式は後述する$\sqrt{3}$の近似で必要となる。以下、表3に数値例を載せておく。

表3　$2a_n-c_n=1$となる原始ピタゴラス数の例

a	b	c
3	4	5
33	56	65
451	780	901
6273	10864	12545
87363	151316	174725
1216801	2107560	2433601
16947843	29354524	33895685
236052993	408855776	472105985
3287794051	5694626340	6575588101
45793063713	79315912984	91586127425

3.6　ピタゴラス数の無理数近似

ある系列のピタゴラス数を用いることで、$\sqrt{2}$などのピタゴラスの定理に関係する無理数に収束する現象が起こることが示された。以下、図6に$\sqrt{2}$で近似するための三角形の構成比について示しておく。

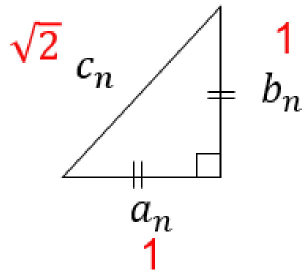

図6　$\sqrt{2}$で近似する三角形の構成比

同様に、$\sqrt{3}$で近似を行いたい場合における三角形の構成比について、以下の図7に示しておく。

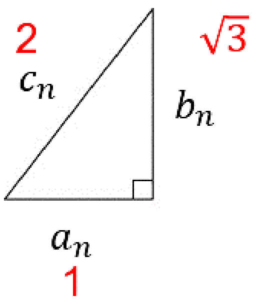

図7　$\sqrt{3}$で近似する三角形の構成比

3.7　原始ピタゴラス数の桁数固定

任意の原始ピタゴラス数の桁数を固定するには、原始ピタゴラス数の解の“tree”構造より、各辺の桁数を、ピタゴラスの定理に基づく恒等式表現によって固定することができるということが分かった。

4.　ヘロン三角形

本発表の核となるヘロン三角形について紹介する。そもそもヘロン三角形について知らない方も多いのではないかと思うが、これは高等学校の数学の教育課程において学習する「ヘロンの公式」からなるある特殊な場合の三角形であることを先に述べておく。以下、図8にヘロン三角形の図形を示しておく。

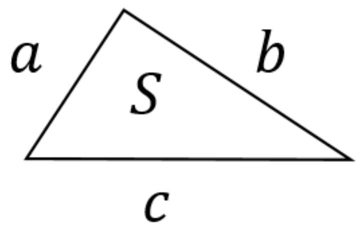

図8　ヘロン三角形

4.1　ヘロンの公式

ヘロンの公式は「三角形の3辺a、b、cの長さから面積Sを求める。」というものである。この公式は、紀元10年ごろのギリシャ人の工学者でもあり、数学者であったアレクサンドリアのヘロンの著書『Metrica』において彼が証明を与えたものである。

4.2　ヘロン数

ヘロンの公式より、三角形の3辺が既知であれば面積が求まる。しかし、その面積のたいていは無理数となることは、実際にヘロンの公式にそれぞれ値を入れることで明らかである。そこで、このヘロンの公式で求まる面積が整数となる場合について、三角形の3辺a、b、cが整数で三角形の面積が整数となるa、b、cをヘロン数という。

特に、ピタゴラス数はヘロン数である。なぜなら、ピタゴラス数のaまたは、bのどちらか1辺は偶数なので、三角形の面積公式より、面積が整数なのは明らかである。

以下、表4にヘロン三角形となる例で値が小さいものをいくつか載せておく。

表4　ヘロン三角形の例

a	b	c	S
3	4	5	6
3	25	26	36
4	13	15	24
5	5	6	12
5	5	8	12
7	15	20	42
7	24	25	84
13	14	15	84
15	26	37	156

4.3　2等辺ヘロン三角形

表4にいくつか例として載っていたが、2辺が等しく、その面積が整数となる、2等辺ヘロン三角形となるものが無数に存在する。以下、表5に2等辺ヘロン三角形の数値例を載せておく。

表5　2等辺ヘロン三角形の例

a	b	c	S
5	5	6	12
5	5	8	12
13	13	10	60
13	13	24	60
17	17	16	120
17	17	30	120
25	25	14	168
25	25	48	168
29	29	40	420
29	29	42	420

4.4　3辺が連続する原始ヘロン三角形

特に、ヘロン数の中でも3辺が連続する場合において、無数に解を持つことがペル方程式の理論より、2次線形数列を用いて導かれる。そこで、a、b、cが互いに素な場合について、本稿では特に、原始ヘロン三角形と呼ぶことにする。以下、表6に3辺が連続する原始ヘロン三角形の数値例を載せておく。

表6　3辺が連続する原始ヘロン三角形の例

a	b	c	S
3	4	5	6
13	14	15	84
51	52	53	1170
193	194	195	16296
723	724	725	226974
2701	2702	2703	3161340
10083	10083	10085	44031786
37633	37634	37635	613283664
140451	140452	140453	8541939510
524173	524174	524175	118973869476

4.5 ヘロン数の下n桁表示

本研究での主結果となる内容であるが、数学系の研究において同様の性質や関係が見つけられるかどうかを探すことは非常に重要である。そこで、ピタゴラス数はある系列に沿ってそれらの値をたどっていくと、任意の桁数の固定をすることができた。そこで、ヘロン数でもそのような形で任意の桁数を固定する手法がないかどうか考え、合同式の理論を用いることで数学的に証明を与えることができた。

5. 3辺が連続する原始ヘロン三角形の一般化

三角形に関する研究の中でも、ヘロン数はまだまだ知られていないことが多く、興味深い研究分野である。そこで、3辺が連続する原始ヘロン三角形の一般化として、公差dの等差数列における$(n-d, n, n+d)$の原始ヘロン三角形が存在するかどうかについて考える。そして、本章の終わりに著者らが考えた予想について述べておく。

5.1 公差11の等差数列を成す原始ヘロン三角形

3辺が公差11の等差数列を成す原始ヘロン三角形は無数に存在する。それらについて、MAGMAで得られた数値例を以下の表7に載せておく。

表7 公差11の等差数列を成す原始ヘロン数の例

a	b	c	S
15	26	37	156
17	28	39	210
65	76	87	2394
75	86	97	3096
267	278	289	33360
305	316	327	43134
1025	1036	1047	464646
1167	1178	1189	600780
3855	3866	3877	6471684
4385	4396	4407	8367786

5.2 公差13の等差数列を成す原始ヘロン三角形

3辺が公差13の等差数列を成す原始ヘロン三角形は無数に存在する。それらについて、MAGMAで得られた数値例を以下の表8に載せておく。

表8 公差13の等差数列を成す原始ヘロン数の例

a	b	c	S
15	28	41	126
25	38	51	456
61	74	87	2220
111	124	137	6510
255	268	281	30954
445	458	471	90684
985	998	1011	431136
1695	1708	1721	1263066
3711	3724	3737	6004950
6361	6374	6387	17592240

5.1と5.2の数値例より、3辺が公差dの等差数列を成す原始ヘロン三角形について、公差dは素数であることが予想される。この予想は未解決であるが、現代の情報社会で重要な暗号(技術)に用いられている素数がここで登場したことはとても興味深いものだといえる。

6. まとめ

本研究より、ピタゴラス数とヘロン数には一見、関係性のない三角形どうしであるが、ヘロン数がピタゴラス数の拡張であるということを、著者の主結果である「任意の桁数固定の手法」より、ピタゴラス数は恒等式表現で、ヘロン数は合同式理論より、数学的証明を与えることができ、同様にいえることができた。また、我々は3辺が連続する原始ヘロン三角形の一般化について興味があり、研究の結果、素数に関する予想を立てることができた。

7. おわりに

本研究は三角形の3辺に関する問題に興味を持った著者らが、整数論計算ソフトMAGMAのプログラムを作成し、そのプログラムを実行することで得られた結果(数値例)について、数学的に証明を与えることを目的としている。

数学系の研究において、数学的思考はもちろん必要であるが、それと同時にプログラミング能力も大切である。そのため、著者らのプログラミング知識の向上が、更なる整数論研究の進展に繋がると考えられる。

参考文献

(1) A.Hall:“Genealogy of Pythagorean triads”, Mathematical Gazette, 54号, pp.377-379 (1970).

(2) Tomas Koshy : “Pell and Pell-Lucas Numbers with Applications”, Springer, pp23-55.

(3) Takeaki MURASAKI :“On the Heron Triple (n+1, n, n-1)”, Department of Mathmatics, pp9-15, Faculty of Education Gunma University (Accepted September 5, 2003).

(4) Nobuhiro Terai , Takeshi Hibino :“On the Exponential Diophantine Equation $(12m^2+1)^x+(13m^2-1)^y=(5m)^z$”, International Journal of Algebra, Vol.9, pp261-272 (2015).

(5) TERADA Tetsuya, ISOKAWA yukinao :“Structure of Heron Triangles : An Experimental Study”, 鹿児島大学教育学部研究紀要, 第68巻別冊, (2017).

(6) K.R.S.Sastry :“If (a, b, c) is Heron, can $(s-a, s-b, s-c)$ also be Heron?”, Canadian Mathematical Society, pp23-27 (2002)

(7) 寺井伸浩 :“数理科学 特集/数の魅力 ピュタゴラス数”, pp18-25, サイエンス社 (2008).

(8) 松山廣 :“3角形とペル方程式の不思議な関係”, pp1-25, 兵庫教育大学研修講座 (2007).

(9) 小林吹代 :“ピタゴラス数を生み出す行列のはなし”, pp10-179, ベレ出版 (2008).

(10) 細矢治夫 :“三角形の七不思議 単純だけど、奥が深い”, pp12-107, 講談社 (2013).

(11) 細矢治夫 :“ピタゴラスとその数理 (数学のかんどころ 6)”, pp2-142, 共立出版 (2011).

(12) 細矢治夫 :“トポロジカル・インデックス フィボナッチ数からピタゴラスの三角形までをつなぐ新しい数学”, pp113-156, 日本評論社 (2012).

(13) 高橋正子 :“コンピュータと数学”, pp84-90, 朝倉書店 (2016).